풀이

# STEP II 2020, 문제 1

순수수학 • 치환적분

> **STEP II 2020, 1번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2020년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP II 시험지에 있다:
>
> www.ocr.org.uk/Images/696589-2020-past-papers.zip

## 핵심 아이디어

각 피적분함수(integrand)는 두 일차 인수(linear factor)의 거듭제곱의 곱이고, 그 지수(exponent)의 합은 $-2$이다. 이런 피적분함수에 알맞은 치환(substitution)은 두 일차 인수의 비(ratio) 또는 그 제곱근이다. 이 치환은 두 괄호를 한꺼번에 흡수하고, 남는 것은 단순한 거듭제곱이나 표준적인 아크탄젠트(arctangent)이다. 소문항 (i)은 주어진 치환으로 이런 일이 일어나는 것을 보여 주고, 소문항 (ii)는 그 요령을 그대로 따라 하게 하며, 소문항 (iii)은 스스로 그것을 알아차리게 한다.

## 풀이

### 소문항 (i)

$x = \dfrac{1}{1-u}$로 놓으면

$$x - 1 = \frac{1-(1-u)}{1-u} = \frac{u}{1-u}, \qquad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u} = \frac{1}{(1-u)^2}.$$

$u$가 $(0,1)$을 움직일 때 $x$는 $(1,\infty)$를 움직이고, $u = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$이다. $0 < u < 1$이므로 제곱근 안의 양은 모두 양수이고, 따라서

$$x^{3/2}(x-1)^{1/2} = \frac{1}{(1-u)^{3/2}} \cdot \frac{u^{1/2}}{(1-u)^{1/2}} = \frac{u^{1/2}}{(1-u)^2}.$$

이제 $(1-u)^2$ 인수가 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}u$와 정확히 약분된다.

$$\int \frac{1}{x^{3/2}(x-1)^{1/2}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{(1-u)^2}{u^{1/2}}\cdot\frac{1}{(1-u)^2}\,\mathrm{d}u = \int u^{-1/2}\,\mathrm{d}u$$
$$= 2u^{1/2}+c = 2\sqrt{\frac{x-1}{x}}+c.$$

**소문항 (ii)**

소문항 (i)에서 $u=\frac{x-1}{x}$는 두 일차 인수의 비였다. 여기서도 같은 아이디어를 따라

$$u=\frac{x-2}{x+1}, \qquad \text{즉} \qquad x+1=\frac{3}{1-u}, \quad x-2=\frac{3u}{1-u},$$

로 놓는다. $x-2=(x+1)-3$이기 때문이다. $x>2$이면 $0<u<1$이고, $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u}=\dfrac{3}{(1-u)^2}$이다. 그러면

$$(x-2)^{3/2}(x+1)^{1/2} = \frac{3^{3/2}u^{3/2}}{(1-u)^{3/2}}\cdot\frac{3^{1/2}}{(1-u)^{1/2}} = \frac{9u^{3/2}}{(1-u)^2},$$

이므로

$$\int \frac{1}{(x-2)^{3/2}(x+1)^{1/2}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{(1-u)^2}{9u^{3/2}}\cdot\frac{3}{(1-u)^2}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{3}\int u^{-3/2}\,\mathrm{d}u$$
$$= -\frac{2}{3}u^{-1/2}+c = -\frac{2}{3}\sqrt{\frac{x+1}{x-2}}+c.$$

미분하여 이를 확인할 수 있다. $f=\frac{x+1}{x-2}$로 놓으면 $f'=-\frac{3}{(x-2)^2}$이므로

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(-\tfrac{2}{3}\sqrt{f}\right) = -\frac{f'}{3\sqrt{f}} = \frac{1}{(x-2)^2}\sqrt{\frac{x-2}{x+1}} = \frac{1}{(x-2)^{3/2}(x+1)^{1/2}}.$$

**소문항 (iii)**

이번에는 치환이 주어지지 않는다. 여분의 인수 $x-1$ 때문에 피적분함수는 비의 순수한 거듭제곱이 아니지만, 두 제곱근은 앞에서와 같은 꼴이다.

> **생각해 보기** 앞의 두 답은 모두 일차 인수들의 비의 제곱근이었다. 그런 제곱근을 새 변수로 잡으면 어떻게 될까?

다음과 같이 놓아 보자.

$$t=\sqrt{\frac{x-2}{3x-2}}.$$

$x$가 2에서 $\infty$로 증가할 때 $\frac{x-2}{3x-2}=\frac{1}{3}-\frac{4}{3(3x-2)}$는 0에서 $\frac{1}{3}$을 향해 증가하므로, $t$는 0에서 $\frac{1}{\sqrt{3}}$까지 증가하고 구간 전체에서 $0\le t<\frac{1}{\sqrt{3}}$이다. $t^2(3x-2)=x-2$를 $x$에 대해 풀면

$$x=\frac{2(1-t^2)}{1-3t^2},$$

이고, 여기서 $1-3t^2>0$이다. 이로부터

$$x-1=\frac{1+t^2}{1-3t^2},\qquad 3x-2=\frac{4}{1-3t^2},$$

이고

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{2[-2t(1-3t^2)+6t(1-t^2)]}{(1-3t^2)^2}=\frac{8t}{(1-3t^2)^2}.$$

$\sqrt{x-2}=t\sqrt{3x-2}$이므로 두 제곱근은 깔끔하게 합쳐진다.

$$(x-2)^{1/2}(3x-2)^{1/2}=t\,(3x-2)=\frac{4t}{1-3t^2}.$$

따라서 분모 전체는

$$(x-1)(x-2)^{1/2}(3x-2)^{1/2}=\frac{4t(1+t^2)}{(1-3t^2)^2},$$

이고, 이번에도 모든 것이 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$와 약분된다.

$$\int_2^\infty \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)(x-2)^{1/2}(3x-2)^{1/2}}=\int_0^{1/\sqrt{3}}\frac{(1-3t^2)^2}{4t(1+t^2)}\cdot\frac{8t}{(1-3t^2)^2}\,\mathrm{d}t=\int_0^{1/\sqrt{3}}\frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$
$$=2\Big[\arctan t\Big]_0^{1/\sqrt{3}}=2\cdot\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3},$$

이므로 요구한 결과를 얻는다.

원래 적분은 양 끝에서 모두 이상적분(improper integral)이지만 수렴(converge)한다. $x=2$ 근처에서 피적분함수는 $\frac{1}{2}(x-2)^{-1/2}$처럼 행동하고, $x$가 클 때는 $\frac{1}{\sqrt{3}}x^{-2}$처럼 행동한다. 치환을 하면 이 적분은 유한 구간에서 연속함수를 적분하는 보통의 적분이 되므로, 극한을 따로 취할 필요가 없다.

## 검산

- (i)과 (ii)의 답을 미분해 본다. (i)의 경우 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}2\sqrt{1-\frac{1}{x}}=\frac{1}{x^2}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{-1/2}=x^{-3/2}(x-1)^{-1/2}$이다.
- 부호: (ii)의 피적분함수는 양수이므로 원시함수(antiderivative)는 증가해야 한다. 실제로 $x$가 커질수록 $\sqrt{\frac{x+1}{x-2}}$는 1을 향해 감소하므로 원시함수는 증가한다.
- 수치 검산: (i)의 $\int_{1.5}^{3}$와 (ii)의 $\int_{2.5}^{4}$를 심프슨 공식(Simpson's rule)으로 계산하면 원시함수로 구한 값($0.47829\ldots$와 $0.70974\ldots$)과 일치한다. (iii)의 적분을 $x=3$에서 나누어 직접 계산하면 $1.0471975\ldots=\frac{\pi}{3}$를 얻는다.

## 흔한 실수

- (iii)에서 적분 구간을 바꾸는 것을 잊는 실수. 위끝은 $\infty$가 아니라 $t = \frac{1}{\sqrt{3}}$이며, $\frac{\pi}{6}$는 바로 여기서 나온다.
- (i)이나 (ii)의 답을 $u$로 쓴 채 문제에서 요구하는 대로 $x$로 되돌리지 않는 실수.
- $1 - u$의 반정수 거듭제곱을 잘못 다루는 실수. 다음과 같이 꼼꼼히 모아야 한다: $(1-u)^{-3/2}(1-u)^{-1/2} = (1-u)^{-2}$.

## STEP 너머

$\sqrt{(x-a)(x-b)}$로 이루어진 피적분함수는 언제나 우리가 쓴 것과 같은 치환으로 유리함수(rational function)로 만들 수 있다. 이는 $x$와 $\sqrt{\text{이차식}}$의 유리함수를 적분하는 고전 이론(오일러(Euler) 치환)의 일부이다. 소문항 (iii)은 무한 구간에서의 이상적분이기도 하며, 이런 적분을 극한으로 정의하여 이해하는 것은 대학 1학년 해석학(analysis)의 표준 주제이다. Abbott의 *Understanding Analysis*는 이상적분을 꼼꼼하게 다루고, Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*에는 이런 종류의 STEP 적분 문제가 더 실려 있다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.