풀이

STEP III 2019, 문제 9

역학 • 움직이는 반구 위의 입자

STEP III 2019, 9번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2019년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP III 시험지에 있다:

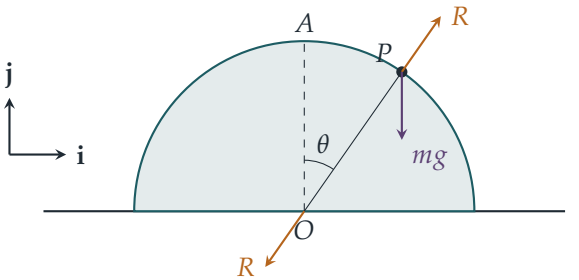
www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

핵심 아이디어

두 면이 모두 매끄러우므로(smooth) 계(입자와 반구)에 작용하는 외력에는 수평 성분이 없다. 따라서 수평 운동량(horizontal momentum)이 보존되며(conserved), 이것이 반구의 속력과 입자의 각속력(angular speed)을 이어 준다. 중력 외에는 일을 하는 힘이 없으므로 에너지도 보존되고, 이 두 법칙으로 (ii)를 얻는다. 입자가 면에서 떨어지는지를 판정하는 깔끔한 기준은 수직항력(normal reaction)이 0이 되는 것이다. 문제에서 제시한 벡터는 성분을 취할 때 미지의 θ가 사라지도록 고른 것이다.

풀이

모형: P는 입자(particle)이고 반구(hemisphere)는 강체(rigid body)이며 모든 접촉면은 매끄럽다. 둘이 닿아 있는 동안 P와 반구 사이에 작용하는 힘은 OP 방향의 수직항력 R뿐이고, 탁자는 반구를 연직 방향으로 민다.



반구에 작용하는 반작용(알아보기 쉽도록 O에 그렸다)은 P에 작용하는 힘과 크기가 같고 방향이 반대이다.

소문항 (i)

시각 t에서 중심 O는 $-s\,\mathbf{i}$로 이동해 있고, P는 O로부터 $\sin\theta\,\mathbf{i} + \cos\theta\,\mathbf{j}$ 방향으로 거리 a만큼 떨어져 있다. 따라서

$$\mathbf{r} = (a\sin\theta - s)\,\mathbf{i} + a\cos\theta\,\mathbf{j},$$

이고, 이를 t에 대하여 미분하면($\sin\theta$와 $\cos\theta$에 연쇄 법칙(chain rule)을 적용한다)

$$\dot{\mathbf{r}} = (a\dot\theta\cos\theta - \dot s)\,\mathbf{i} - a\dot\theta\sin\theta\,\mathbf{j},$$

를 얻으며, 이것이 보이려던 식이다.

계에 작용하는 외력은 두 무게와 탁자의 반작용으로 모두 연직 방향이므로, 전체 수평 운동량은 처음 값인 0으로 유지된다(처음의 작은 변위로 생기는 속력은 무시할 수 있다고 본다). 반구의 속도는 $-\dot s\,\mathbf{i}$이므로

$$m(a\dot\theta\cos\theta - \dot s) - M\dot s = 0 \quad\Longrightarrow\quad \dot s = \frac{m}{m+M}\,a\dot\theta\cos\theta = (1-k)\,a\dot\theta\cos\theta,$$

이다. 여기서 $1-k = \dfrac{m}{m+M}$이기 때문이다. 이를 $\dot{\mathbf{r}}$의 $\mathbf{i}$ 성분에 대입하면

$$a\dot\theta\cos\theta - (1-k)a\dot\theta\cos\theta = k\,a\dot\theta\cos\theta, \qquad \text{따라서} \qquad \dot{\mathbf{r}} = a\dot\theta\,(k\cos\theta\,\mathbf{i} - \sin\theta\,\mathbf{j}).$$

소문항 (ii)

반작용들이 하는 알짜 일은 없다. 탁자의 반작용은 반구의 운동 방향에 수직이고, P와 반구 사이에 작용하는 한 쌍의 힘 $\pm R$은 P가 면 위에 머무르므로 전체 일이 0이다(둘의 상대 속도는 면을 따르는 방향이어서 R에 수직이다). 따라서 운동 에너지(kinetic energy)와 위치 에너지(potential energy)의 합이 보존된다. P는 $a(1-\cos\theta)$만큼 내려왔고 처음에는 모든 것이 (사실상) 정지해 있었으므로

$$\tfrac12 ma^2\dot\theta^2(k^2\cos^2\theta + \sin^2\theta) + \tfrac12 M\dot s^2 = mga(1-\cos\theta).$$

이다. (i)에 의해 $M\dot s^2 = M(1-k)^2a^2\dot\theta^2\cos^2\theta$이다. 그러면 $a^2\dot\theta^2\cos^2\theta$의 전체 계수는

$$mk^2 + M(1-k)^2 = \frac{mM^2 + Mm^2}{(m+M)^2} = \frac{mM}{m+M} = mk.$$

이다. 그러므로 $\tfrac12 ma^2\dot\theta^2(k\cos^2\theta + \sin^2\theta) = mga(1-\cos\theta)$이고, 양변을 $\tfrac12 ma$로 나누면

$$a\dot\theta^2(k\cos^2\theta + \sin^2\theta) = 2g(1-\cos\theta).$$

이다.

소문항 (iii)

$\mathbf{u} = \sin\theta\,\mathbf{i} + k\cos\theta\,\mathbf{j}$라 하자. (i)의 마지막 결과를 미분하면

$$\ddot{\mathbf{r}} = a\ddot{\theta}\,(k\cos\theta\,\mathbf{i} - \sin\theta\,\mathbf{j}) - a\dot{\theta}^2\,(k\sin\theta\,\mathbf{i} + \cos\theta\,\mathbf{j}).$$

이다. $k\cos\theta\sin\theta - \sin\theta\,k\cos\theta = 0$이므로 첫 번째 괄호는 $\mathbf{u}$에 수직이다. 따라서

$$\ddot{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{u} = -a\dot{\theta}^2(k\sin^2\theta + k\cos^2\theta) = -k\,a\dot{\theta}^2.$$

이다.

> **?** **생각해 보기** 왜 하필 이 벡터가 유용할까?

이 벡터는 우리가 아무것도 모르는 $\ddot{\theta}$ 항을 없애고, (ii)에서 구한 $\dot{\theta}^2$만 남겨 준다. 이제 P에 대한 뉴턴의 제2법칙(Newton's second law)과 비교하자.

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -mg\,\mathbf{j} + R(\sin\theta\,\mathbf{i} + \cos\theta\,\mathbf{j}).$$

$\mathbf{u}$ 방향 성분을 취하여 위의 결과와 같다고 놓으면

$$-mk\,a\dot{\theta}^2 = -mgk\cos\theta + R(\sin^2\theta + k\cos^2\theta),$$

이므로

$$R(\sin^2\theta + k\cos^2\theta) = mk(g\cos\theta - a\dot{\theta}^2).$$

이다. 입자는 R이 0으로 떨어질 때 반구에서 떨어진다. $k > 0$이므로 $\theta = \alpha$에서

$$a\dot{\theta}^2 = g\cos\alpha.$$

를 얻는다.

삼차방정식. $c = \cos\alpha$로 놓고, $\sin^2\alpha = 1 - c^2$을 이용하여 $\theta = \alpha$에서 (ii)를 쓰면

$$gc(kc^2 + 1 - c^2) = 2g(1 - c) \quad\Longrightarrow\quad (1-k)\,c^3 - 3c + 2 = 0.$$

이다. $f(x) = (1-k)x^3 - 3x + 2$라 하자. m과 M이 모두 양수이므로 $0 < 1 - k < 1$이다.

- $-1 \le x \le 1$에서 $f'(x) = 3\big((1-k)x^2 - 1\big) < 0$이므로, 이 구간에서 f는 순감소(strictly decreasing)하고 $[-1, 1]$에서 근을 많아야 하나 가진다.
- $f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{8}{27}(1-k) - 2 + 2 = \frac{8}{27}(1-k) > 0$이고 $f(1) = -k < 0$이다.

따라서 $[-1, 1]$에 있는 유일한 근은 $\frac{2}{3}$과 1 사이(양 끝 제외)에 있다. $\cos\alpha$는 $[-1, 1]$에 있어야 하므로 바로 이 근이며,

$$\cos\alpha > \tfrac{2}{3}.$$

이다. (이는 R에 대한 식과도 들어맞는다. (ii)를 대입하면 $g\cos\theta - a\dot{\theta}^2$의 부호가 $-f(\cos\theta)$의 부호와 같음을 알 수 있는데, 이 값은 $\theta = 0$에서 양수이고 이 근에서 처음으로 0이 된다. 따라서 P는 실제로 그때까지 접촉을 유지한다.)

검산

- $M \to \infty$이면 $k \to 1$이 되어 반구는 움직이지 않고, 삼차방정식은 $-3c + 2 = 0$이 된다. 이는 고정된 구에서 미끄러져 떨어지는 입자에 대한 익숙한 결과 $\cos\alpha = \frac{2}{3}$이다. 반구가 움직이면 입자는 더 일찍, 즉 더 큰 $\cos\alpha$에서 떨어진다.
- 두 질량이 같으면 $1 - k = \frac{1}{2}$이고, 삼차방정식 $c^3 - 6c + 4 = 0$은 $(c-2)(c^2 + 2c - 2) = 0$으로 인수분해되어 $\cos\alpha = \sqrt{3} - 1 \approx 0.732$를 얻는다. 이 값은 $\frac{2}{3}$보다 크다.
- 여러 질량비에 대하여 컴퓨터로 전체 운동을 단계별 수치 시뮬레이션해 보니, 운동하는 동안 (i)과 (ii)의 관계식이 성립함이 확인되었고, $m = M$일 때 $\cos\theta \approx 0.732$에서 반작용이 0이 되어 삼차방정식의 결과와 일치하였다.

흔한 실수

- 고정된 구에 대한 조건 $a\dot{\theta}^2 = g\cos\theta$를 근거 없이 사용하는 것. 여기서는 반구가 가속하므로 입자의 가속도는 단순히 고정점을 중심으로 하는 원운동의 가속도가 아니다. 떨어지는 순간에 이 식이 마침 성립하는 것은 오직 $R = 0$이면 그 순간 반구의 수평 가속도가 0이기 때문이다.
- 에너지 방정식에서 반구의 운동 에너지 $\frac{1}{2}M\dot{s}^2$을 빠뜨리는 것.
- $[-1, 1]$에 다른 근이 있을 가능성을 배제하지 않고, $\frac{2}{3}$과 1 사이에 근이 있다는 것만 보이는 것.

STEP 너머

이것은 자유도(degree of freedom)가 2인 계이며, 라그랑주 역학(Lagrangian mechanics)으로 체계적으로 다룰 수 있다. 운동 에너지와 위치 에너지를 θ와 s로 나타내면, s가 라그랑지안(Lagrangian)에 나타나지 않으므로 수평 운동량 보존이 저절로 나온다(이러한 좌표를 "무시 가능한(ignorable)" 좌표라 하며, 뇌터 정리(Noether's theorem)에 의해 대칭성과 연결된다). R과 같은 구속력(constraint force)은 여기서 한 것과 똑같이 나중에 구한다. 먼저 뉴턴 역학의 직관을 기르려면 Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)가 좋은 출발점이다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.