풀이

STEP III 2019, 문제 8

순수수학 • 벡터와 3차원 기하

STEP III 2019, 8번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2019년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP III 시험지에 있다:

www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

핵심 아이디어

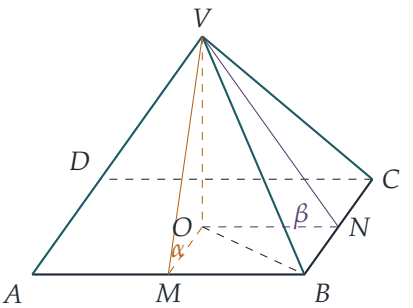
각뿔(pyramid)에 좌표를 설정한다. 각 옆면은 수평인 밑면의 모서리를 하나씩 포함하므로, 그 법선(normal)은 그 모서리에 수직이다. 따라서 법선은 연직 평면 안에 놓이게 되고, 그 평면에서 옆면과 밑면 사이의 각을 바로 읽어 낼 수 있다. 그다음 두 옆면 사이의 각은 법선의 내적(dot product)에서 얻어지며, 나머지는 신중한 삼각함수 계산과 산술-기하 평균 부등식(AM–GM)을 한 번 쓰는 것으로 충분하다.

풀이

밑면의 중심을 원점 O로 하고, $\mathbf{i}$는 AB 방향, $\mathbf{j}$는 BC 방향, $\mathbf{k}$는 위쪽 방향으로 잡는다. 다음과 같이 놓는다.

$$A=(-a,-b,0),\quad B=(a,-b,0),\quad C=(a,b,0),\quad D=(-a,b,0),\quad V=(0,0,h),$$

여기서 $a,b,h>0$이다.



$M=(0,-b,0)$을 AB의 중점, $N=(a,0,0)$을 BC의 중점이라 하자. $VA=VB$이므로 직선

VM은 면 AVB 위에 있고 AB에 수직이다. 밑면 위의 OM도 마찬가지이다. 따라서 옆면과 밑면 사이의 각은 각 VMO이고,

$$\tan\alpha = \frac{h}{b}, \qquad \text{이며, 마찬가지로} \qquad \tan\beta = \frac{h}{a}.$$

소문항 (i)

면 AVB는 방향 $\overrightarrow{AB} \parallel \mathbf{i}$와 $\overrightarrow{MV} = b\,\mathbf{j} + h\,\mathbf{k}$를 포함한다. 법선 하나는 다음과 같다.

$$\mathbf{i} \times (b\,\mathbf{j} + h\,\mathbf{k}) = -h\,\mathbf{j} + b\,\mathbf{k}.$$

이를 길이 $\sqrt{h^2 + b^2}$로 나누고 $\tan\alpha = h/b$를 이용하면 단위 법선(unit normal)을 얻는다.

$$\mathbf{n}_1 = -\sin\alpha\,\mathbf{j} + \cos\alpha\,\mathbf{k}.$$

$\mathbf{j}$ 성분이 음수이므로 이 법선은 각뿔의 바깥쪽을 향한다(면 AVB는 $y < 0$ 쪽에 있다).

정확히 같은 방법으로, 면 BVC는 $\mathbf{j}$와 $\overrightarrow{NV} = -a\,\mathbf{i} + h\,\mathbf{k}$를 포함하고, 바깥쪽 단위 법선은 다음과 같다.

$$\mathbf{n}_2 = \sin\beta\,\mathbf{i} + \cos\beta\,\mathbf{k}.$$

따라서

$$\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = \cos\alpha\cos\beta.$$

> ? **생각해 보기** 법선 사이의 각은 두 면 사이의 각인가, 아니면 그 보각(supplement)인가?

공통 모서리 VB에 수직인 단면을 살펴보자. 두 면은 내각 $\pi - \theta$로 만나는 두 직선으로 나타나고, 각 바깥쪽 법선은 자기 직선에 수직이며 입체에서 멀어지는 방향을 향한다. 한 면을 내각만큼 돌려 다른 면에 겹치면 바깥쪽 법선도 같은 각만큼 돌아가지만, 단면에서 두 법선은 모두 **바깥쪽**을 향하므로 둘이 이루는 각은 $\pi - (\pi - \theta) = \theta$이다. (정육면체를 떠올려 보자. 면은 $\frac{\pi}{2}$로 만나고 법선도 $\frac{\pi}{2}$를 이룬다. 각뿔을 납작하게 하면 면 사이의 각은 π에 가까워지고 법선 사이의 각은 0에 가까워진다.) 따라서

$$\cos\theta = \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = \cos\alpha\cos\beta,$$

이고, 이것이 보이려던 결과이다. $0 < \cos\alpha\cos\beta < 1$이므로 θ는 예각(acute angle)이며, 이는 두 면이 둔각으로 만난다는 사실과 들어맞는다.

소문항 (ii)

V에서 내린 수선의 발은 O이므로, BV와 밑면 사이의 각은 각 VBO이고

$$\cot\phi = \frac{OB}{h} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{h}.$$

따라서

$$\cot^2\phi = \frac{a^2}{h^2} + \frac{b^2}{h^2} = \cot^2\beta + \cot^2\alpha,$$

이다. 여기서 $\cot\beta = a/h$와 $\cot\alpha = b/h$를 이용하였다. 이것이 첫 번째 결과이다.

두 번째 결과를 위해 $p = \cos^2\alpha$, $q = \cos^2\beta$로 놓으면, 소문항 (i)에 의해 $\cos^2\theta = pq$이다. 그러면

$$\cot^2\phi = \frac{p}{1-p} + \frac{q}{1-q} = \frac{p+q-2pq}{(1-p)(1-q)}.$$

$\cos^2\phi = \dfrac{\cot^2\phi}{1+\cot^2\phi}$이므로 다음이 필요하다.

$$1+\cot^2\phi = \frac{(1-p)(1-q)+p+q-2pq}{(1-p)(1-q)} = \frac{1-pq}{(1-p)(1-q)},$$

이제 나누면

$$\cos^2\phi = \frac{p+q-2pq}{1-pq} = \frac{\cos^2\alpha+\cos^2\beta-2\cos^2\theta}{1-\cos^2\theta}.$$

($\cos\theta < 1$이므로 분모는 양수이다.)

이제 $\cos\alpha$와 $\cos\beta$는 양수이므로 산술-기하 평균 부등식에 의해

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta \;\geq\; 2\cos\alpha\cos\beta = 2\cos\theta,$$

이고, $1-\cos^2\theta > 0$이므로

$$\cos^2\phi \;\geq\; \frac{2\cos\theta - 2\cos^2\theta}{1-\cos^2\theta}.$$

생각해 보기 이 하한은 ϕ와 θ에 대해 무엇을 알려 주는가?

이를 간단히 하여 $\cos^2\theta$와 비교해 보자. 양의 인수 $1-\cos\theta$를 약분하면

$$\frac{2\cos\theta(1-\cos\theta)}{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)} = \frac{2\cos\theta}{1+\cos\theta}.$$

$c = \cos\theta \in (0,1)$로 놓으면

$$\frac{2c}{1+c} - c^2 = \frac{c\,(2-c-c^2)}{1+c} = \frac{c\,(1-c)(2+c)}{1+c} > 0.$$

따라서 $\cos^2\phi \geq \dfrac{2c}{1+c} > \cos^2\theta$이다. ϕ와 θ는 모두 $(0, \frac{\pi}{2})$에 있고, 이 구간에서 코사인은 양수이며 감소하므로 $\cos\phi > \cos\theta$에서 $\phi < \theta$를 얻는다.

검산

- 밑면이 정사각형이고 h가 한 변의 절반인 경우($a = b = h$): $\alpha = \beta = \frac{\pi}{4}$이므로 $\cos\theta = \frac{1}{2}$이고 $\theta = 60°$이다. 직접 계산하면 $\cot\phi = \sqrt{2}$이므로 $\cot^2\phi = 2 = 1 + 1$이고 $\phi \approx 35.26° < 60°$이다. 또한 $\cos^2\phi = \frac{2}{3}$이며, 이는 $(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2})/(1 - \frac{1}{4}) = \frac{2}{3}$과 일치한다.
- 무작위로 만든 10^5개의 각뿔에 대해 VB를 지나는 단면에서 두 면 사이의 각을 직접 측정하는 컴퓨터 검사를 한 결과, $\cos\theta = \cos\alpha\cos\beta$ 및 ϕ에 대한 두 공식과 모두 일치했고, 언제나 $\phi < \theta$였다.

흔한 실수

- 한 면에는 안쪽 법선을, 다른 면에는 바깥쪽 법선을 잡는 실수: 그러면 내적의 부호가 반대가 되어 $\cos(\pi - \theta)$를 얻게 된다.
- α를 빗높이(slant height) VM이 아니라 모서리 VA를 따라 재는 실수: 두 평면 사이의 각은 두 평면의 교선에 수직인 방향으로 재야 한다.
- $\cos^2\phi \geq \dfrac{2\cos\theta}{1+\cos\theta}$에서 멈추고, 이 값이 $\cos^2\theta$보다 크다는 것을 보이지 않는 실수.

STEP 너머

두 평면 사이의 각은 (보각을 취하는 차이를 제외하면) 법선 사이의 각과 같으며, 이는 다변수 미적분학(multivariable calculus)과 미분기하학(differential geometry)에서 법선을 이용해 곡면을 기술하는 방법의 출발점이다. 항등식 $\cos\theta = \cos\alpha\cos\beta$는 구면 피타고라스 정리(spherical Pythagoras theorem)가 모습을 바꾼 것이기도 하다. 세 법선 $\mathbf{k}$, $\mathbf{n}_1$, $\mathbf{n}_2$가 직각 구면삼각형을 이루기 때문이다. 스트랭(Strang)의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수학 입문)는 내적과 외적(cross product)에 대한 감각을 깊게 다지기에 좋은 책이다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.