풀이

STEP III 2019, 문제 7

순수수학 • 곡선 그리기

> **STEP III 2019, 7번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2019년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP III 시험지에 있다:
>
> www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

핵심 아이디어

이 방정식에는 x^2과 y^2만 들어 있으므로, x^2에 대한(또는 y^2에 대한) 이차방정식(quadratic)이다. 이로부터 두 가지 도구를 한꺼번에 얻는다. 하나는 곡선이 도달할 수 있는 y의 값을 알려 주는 판별식(discriminant)이고, 다른 하나는 x^2을 y로 나타낸 명시적인 공식이다. 원점 근처의 모양을 알아볼 때는 차수가 가장 낮은 항만 남기고, 원점에서 멀리 떨어진 곳에서는 차수가 가장 높은 항만 남긴다. 특별한 경우인 $a = b$일 때는 방정식이 완전히 인수분해된다.

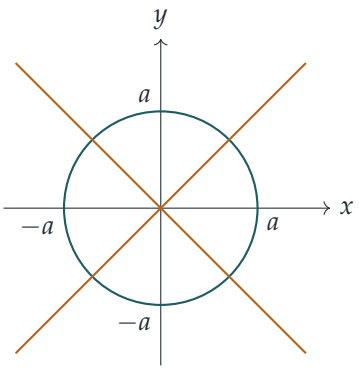
풀이

소문항 (i)

$a = b$일 때 모든 항을 한쪽으로 옮기고 사차항(quartic term)과 이차항을 묶는다.

$$\begin{aligned} 0 &= (y^4 - x^4) - a^2(y^2 - x^2) \\ &= (y^2 - x^2)(y^2 + x^2) - a^2(y^2 - x^2) \\ &= (y^2 - x^2)(x^2 + y^2 - a^2). \end{aligned}$$

따라서 점이 곡선 위에 있을 필요충분조건은 $y = \pm x$ 또는 $x^2 + y^2 = a^2$이다. 즉 악마의 곡선(Devil's Curve)은 두 직선 $y = x$, $y = -x$와 원점을 중심으로 하는 반지름 a인 원을 합친 것이다.



소문항 (ii)(a)

이제 $a = 2$, $b = \sqrt{5}$이고, 곡선은 $y^4 - 5y^2 = x^4 - 4x^2$이다. $y \geq 0$을 고정하고 $X = x^2$이라 하자. $x \geq 0$인 점 (x, y)가 곡선 위에 있을 필요충분조건은 $X \geq 0$이 다음을 만족하는 것이다.

$$X^2 - 4X - (y^4 - 5y^2) = 0.$$

이 방정식이 실근을 가지려면 판별식이 음이 아니어야 한다.

$$\begin{aligned} 16 + 4(y^4 - 5y^2) &= 4(y^4 - 5y^2 + 4) = 4(y^2 - 1)(y^2 - 4) \\ &= 4(y + 1)(y + 2)(y - 1)(y - 2) \geq 0. \end{aligned}$$

$y \geq 0$이므로 인수 $y + 1$과 $y + 2$는 양수이다. 따라서 $(y - 1)(y - 2) \geq 0$이어야 하고, 즉

$$0 \leq y \leq 1 \quad \text{또는} \quad y \geq 2.$$

역으로, 이러한 y는 모두 실제로 나타난다. 두 근은

$$X = 2 \pm \sqrt{D}, \qquad D = (y^2 - 1)(y^2 - 4),$$

이고, 큰 근은 2 이상이므로 x^2의 값으로 유효하다. 아래에서 이 x^2 공식을 사용할 것이다.

소문항 (ii)(b)

원점 가까이에서는 사차항 y^4과 x^4이 y^2과 x^2에 비해 아주 작다. 따라서 곡선은 근사적으로

$$-5y^2 \approx -4x^2, \qquad \text{즉} \qquad y \approx \tfrac{2}{\sqrt{5}}\, x \quad (x, y \geq 0).$$

곡선은 기울기가 $2/\sqrt{5} \approx 0.89$인 직선을 따라 원점을 떠나며, 이 직선은 직선 $y = x$보다 약간 아래에 있다. ((a)의 공식도 이와 일치한다. 근 $X = 2 - \sqrt{D}$에서 이항전개(binomial expansion)를 하면 $x^2 = \frac{5}{4}y^2 + O(y^4)$를 얻는다.)

원점에서 아주 멀리 떨어진 곳에서는 차수가 가장 높은 항이 지배한다. $y^4 \approx x^4$이므로 $y \approx x$이다. 이보다 더 정밀하게 할 수 있다. 방정식을 다음과 같이 쓰자.

$$(y^2 - x^2)(y^2 + x^2) = 5y^2 - 4x^2 \quad \Longrightarrow \quad y^2 - x^2 = \frac{5y^2 - 4x^2}{y^2 + x^2}.$$

$y/x \to 1$이므로 우변은 $\frac{5-4}{2} = \frac{1}{2}$로 수렴한다. 따라서 $y^2 \approx x^2 + \frac{1}{2}$이고, 이로부터

$$y \approx x + \frac{1}{4x}.$$

곡선은 직선 $y = x$를 점근선(asymptote)으로 가지며, **위쪽에서** 이 직선에 다가간다. 사실 곡선은 원점 이외에서는 이 직선과 만나지 않는다. 방정식에 $y = x$를 대입하면 $x^2 = 0$이 되기 때문이다.

소문항 (ii)(c)

$y^4 - 5y^2 = x^4 - 4x^2$을 x에 대하여 음함수 미분(implicit differentiation)하면

$$(4y^3 - 10y)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 4x^3 - 8x \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{2x(x^2-2)}{y(2y^2-5)}.$$

x축에 평행한 접선(*tangent*): 분자는 0이고 분모는 0이 아니어야 한다. 따라서 $x = 0$ 또는 $x = \sqrt{2}$이다.

- $x = 0$: 이때 $y^4 = 5y^2$이므로 $y = 0$ 또는 $y = \sqrt{5}$이다. $(0, \sqrt{5})$에서 분모는 $\sqrt{5}(10-5) \neq 0$이므로 이 점은 조건을 만족한다.
- $x = \sqrt{2}$: 이때 $y^4 - 5y^2 = 4 - 8$이므로 $y^4 - 5y^2 + 4 = 0$이고, 따라서 $y = 1$ 또는 $y = 2$이다. 각 점에서 분모는 -3과 6으로 모두 0이 아니다.

> ? **생각해 보기** 분자가 역시 0이 되는 원점은 왜 포함하지 않을까?

$(0,0)$에서는 분모도 0이 되므로 공식은 $0/0$이 되어 아무것도 알려 주지 않는다. 이 문제는 (b)에서 이미 해결되었다. 곡선은 기울기 0이 아니라 기울기 $2/\sqrt{5}$로 원점을 지난다.

따라서 접선이 수평인 점은 $(0, \sqrt{5})$, $(\sqrt{2}, 1)$, $(\sqrt{2}, 2)$이다.

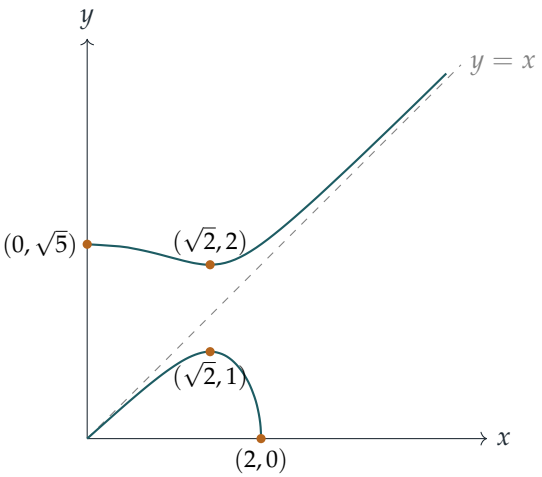
y축에 평행한 접선: 분모는 0이고 분자는 0이 아니어야 하므로 $y = 0$ 또는 $y^2 = \frac{5}{2}$이다. 그런데 $\sqrt{5/2} \approx 1.58$은 1과 2 사이에 엄격하게 놓이므로 (a)에 의해 제외된다. $y = 0$이면 $x^4 = 4x^2$이므로 $x = 0$(다시 원점이며, 위와 같은 이유로 제외된다) 또는 $x = 2$이다. $(2,0)$에서 분자는 $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8 \neq 0$이다. 따라서 이러한 점은 $(2,0)$뿐이다.

$x \geq 0, y \geq 0$에서의 개형 $x^2 = 2 \pm \sqrt{D}$를 이용하면 곡선은 두 부분으로 이루어진다.

- $0 \leq y \leq 1$**에서의 고리.** 근 $2 - \sqrt{D}$는 0($y = 0$일 때)에서 2($y = 1$일 때)까지 증가하고,

$2+\sqrt{D}$는 4에서 2까지 감소한다. 따라서 곡선은 기울기 $2/\sqrt{5}$로 원점을 떠나 $(\sqrt{2},1)$에서 극대에 이른 뒤, 내려와서 $(2,0)$에서 x축과 수직으로 만난다.

- **$y \geq 2$에서의 날개.** $2 \leq y \leq \sqrt{5}$일 때 근 $2-\sqrt{D}$는 2에서 0까지 감소하고, $y=\sqrt{5}$를 넘어서면 음수가 되므로 x^2의 값으로 유효하지 않다. 근 $2+\sqrt{D}$는 2에서 한없이 증가한다. 따라서 이 가지는 수평 접선을 가지고 $(0,\sqrt{5})$에서 시작하여 $(\sqrt{2},2)$에서 극소까지 내려간 뒤, 다시 올라가며 위쪽에서 $y=x$에 다가간다.

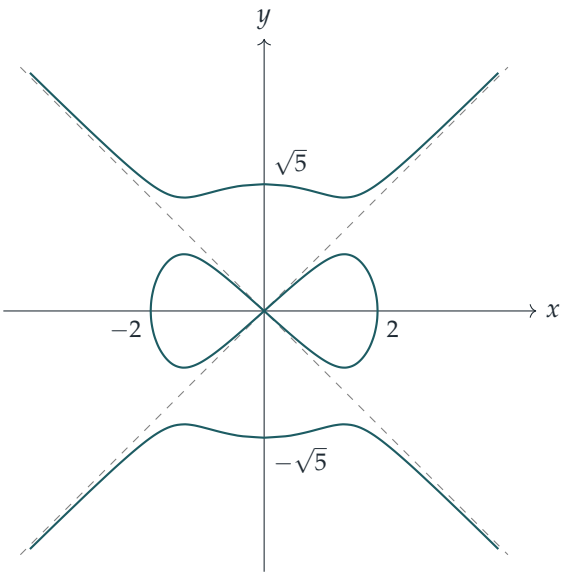


소문항 (iii)

방정식에는 x^2과 y^2만 들어 있으므로, 곡선은 y축에 대하여 대칭(x를 $-x$로 바꾼다)이고 x축에 대하여 대칭(y를 $-y$로 바꾼다)이다. 사분면 하나의 곡선을 두 축에 대하여 대칭이동하면 다음과 같다.

- 고리는 $x=-2$와 $x=2$ 사이에서 $|y| \leq 1$인 8자 모양이 된다. 두 고리는 직선 $y=\pm\frac{2}{\sqrt{5}}x$를 따라 원점에서 교차하며, $(\pm\sqrt{2},\pm 1)$에서 극점을 가진다.
- 날개는 $y \geq 2$인 가지와 $y \leq -2$인 가지, 두 개의 가지가 된다. 각 가지는 $(0,\pm\sqrt{5})$에서 극대 또는 극소를 가지고 $(\pm\sqrt{2},\pm 2)$에서 극점을 가지며, 둘 다 바깥쪽에서 점근선 $y=\pm x$에 다가간다.

곡선의 어떤 부분도 띠 영역 $1<|y|<2$에 놓이지 않는다.



검산

- 표시한 각 점은 방정식을 만족한다. 예를 들어 $(\sqrt{2}, 2)$에서는 양변이 모두 -4이고, $(0, \sqrt{5})$에서는 양변이 모두 0이다.
- 점 $(1, 1.5)$는 금지된 띠 영역 안에 있다. 이 점에서 좌변은 $2.25 \times (-2.75) \approx -6.19$인데, 우변 $x^2(x^2-4)$는 결코 -4보다 작아질 수 없다($x^2 = 2$일 때가 최솟값이다). 이것이 판별식 논증을 축소해서 보여 주는 예이다.
- 날개 위의 $y = 100$에서 공식은 $x^2 = 2 + \sqrt{(10^4-1)(10^4-4)}$를 준다. 이때 $4x(y-x) \approx 1.0002$이므로 $y - x \approx \frac{1}{4x}$와 일치한다. 원점 근처에서 고리 위의 비 y/x는 $0.8944 \approx 2/\sqrt{5}$로 수렴한다.

흔한 실수

- $(0,0)$을 수평(또는 수직) 접선을 가지는 점으로 포함하는 것. 이 점에서 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$는 $0/0$이고, 실제 기울기는 (b)에서 얻는다.
- 고리가 $y = x$를 따라 원점을 떠나도록 그리거나, 날개가 $y = x$를 가로지르도록 그리는 것. 고리는 기울기 $2/\sqrt{5} < 1$로 출발하며, 날개는 항상 $y = x$보다 엄격하게 위에 있다.
- 조건 $x^2 \geq 0$을 잊는 것. 이 조건 때문에 안쪽 근은 $y = \sqrt{5}$에서 끊긴다.

STEP 너머

악마의 곡선은 **대수 곡선**(*algebraic curve*), 즉 다항식 $F(x, y)$의 영점 집합이다. 원점은 두 편도함수(partial derivative) F_x와 F_y가 모두 0이 되는 **특이점**(*singular point*)이다. 그 점에서의 접선은 F의 차수가 가장 낮은 항으로부터 얻어지는데, 이것이 바로 (b)에서 한 일이다. 또한 차수가 가장 높은 항은 점근선의 방향을 알려 준다. 대학에서는 이러한 아이디어가 음함수 정리(implicit function theorem)와 대수기하학(algebraic geometry)에서 다시 등장한다. Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*에는 꼼꼼한 해설이 달린 STEP 스타일의 곡선 그리기 문제가 더 실려 있다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.