풀이

STEP III 2019, 문제 6

순수수학 • 복소평면 위의 원

> **STEP III 2019, 6번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2019년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP III 시험지에 있다:
>
> www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

핵심 아이디어

처음에 주어진 식은 사실 $|z-a|^2 - r^2$를 다른 모양으로 쓴 것이다. 따라서 자취(locus)는 a로부터 거리가 r인 점들의 집합이다. $\omega = 1/z$에 의한 상(image)을 구하려면 $z = 1/\omega$를 대입하고 분모를 없앤 다음, 그 결과를 처음 식과 **같은** 모양으로 다시 정리한다. 그 모양이 되면 계수 비교(matching coefficients)로 중심과 반지름을 곧바로 읽어 낼 수 있다. 그런 다음 중심과 반지름을 비교하면 C'과 C가 언제 같은 원인지 결정된다.

풀이

$(z-a)^* = z^* - a^*$이므로

$$|z-a|^2 = (z-a)(z^*-a^*) = zz^* - a^*z - az^* + aa^*,$$

이다. 따라서 주어진 방정식은 정확히 $|z-a|^2 = r^2$, 즉 ($r > 0$이므로) $|z-a| = r$라는 뜻이다. 그러므로 C는 **중심이 a이고 반지름이 r인** 원이다.

더 일반적으로, $s > 0$일 때 방정식 $ww^* - bw^* - b^*w + bb^* - s^2 = 0$은 중심이 b이고 반지름이 s인 원이다. 이것을 틀로 사용하자.

소문항 (i)

먼저 $z = 0$은 C 위에 있지 않다. 그러려면 $|a| = r$, 즉 $a^*a = r^2$이어야 하는데, 이는 가정에서 제외되어 있다. 따라서 $\omega = 1/z$는 C의 모든 점에서 정의되고, $\omega \neq 0$이다. 또 $z = 1/\omega$이므로, Q가 C' 위에 있을 필요충분조건은 $\omega \neq 0$이고

$$\left|\frac{1}{\omega} - a\right| = r \iff |1 - a\omega| = r|\omega| \iff (1-a\omega)(1-a^*\omega^*) = r^2\omega\omega^*.$$

인 것이다. 전개하여 항을 정리하면

$$(a^*a - r^2)\,\omega\omega^* - a\omega - a^*\omega^* + 1 = 0.$$

이다. $k = a^*a - r^2 = |a|^2 - r^2$라 두면, 가정에 의해 k는 0이 아닌 실수이다. k로 나누면

$$\omega\omega^* - \frac{a^*}{k}\,\omega^* - \frac{a}{k}\,\omega + \frac{1}{k} = 0.$$

이다. 이 식은 $b = a^*/k$로 두면 (k가 실수이므로 $b^* = a/k$) 틀과 일치한다. 단, $bb^* - s^2 = 1/k$, 즉

$$s^2 = \frac{|a|^2}{k^2} - \frac{1}{k} = \frac{|a|^2 - k}{k^2} = \frac{r^2}{k^2}.$$

이어야 한다. 이 값은 양수이므로 C'은 실제로 원이고,

$$\text{중심}\,\frac{a^*}{|a|^2 - r^2}, \qquad \text{반지름}\,\frac{r}{||a|^2 - r^2|}.$$

이다. ($\omega = 0$은 $1 = 0$이 되므로 이 방정식을 만족하지 않는다. 따라서 이 원의 모든 점은 실제로 C 위의 어떤 z에 대한 $1/z$이다.)

? 생각해 보기 두 원이 같을 필요충분조건은...?

두 원이 같을 필요충분조건은 중심이 같고 반지름이 같은 것이다. 따라서 $C' = C$이려면

$$\frac{r}{|k|} = r \qquad \text{이고} \qquad \frac{a^*}{k} = a.$$

이어야 한다. 첫째 조건에서 $|k| = 1$, 즉 $k^2 = 1$이다.

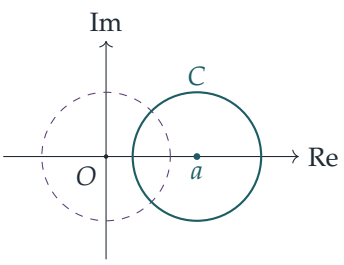
$$(|a|^2 - r^2)^2 = 1.$$

따라서 $k = 1$ 또는 $k = -1$이고, 둘째 조건에서 다음을 얻는다.

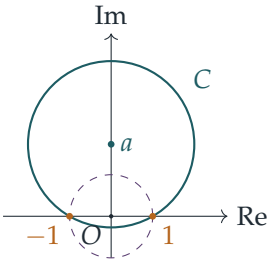
- $k = 1$이면 $a^* = a$이므로 a는 **실수**이다.
- $k = -1$이면 $a^* = -a$이므로 a는 **허수**(순허수(purely imaginary))이다.

($a = 0$이면 둘 다에 해당하고, 이때 $r = 1$이다.) 역으로, 이 둘 중 어느 경우든 반지름 조건과 함께 성립하면 중심과 반지름이 실제로 일치한다.

그림. a가 실수이면 $|a|^2 = r^2 + 1 > r^2$이므로, 중심은 실수축 위에서 O로부터 거리 $\sqrt{r^2+1}$인 곳에 있고, 원점은 C의 **바깥**에 있다. 이 원은 실수축과 $a - r$, $a + r$에서 만나고, 두 수의 곱은 $a^2 - r^2 = 1$이다. $1/z$가 두 점을 서로 바꾸므로 당연히 그래야 한다. a가 순허수이면 $|a|^2 = r^2 - 1$이므로 이 경우에는 $r \geq 1$이어야 한다. 중심은 허수축 위에 있고 원점은 C의 **안쪽**에 있다. $a = \mathrm{i}c$로 쓰면 실수축과 만나는 점은 $x^2 + c^2 = r^2$를 만족하므로 $x = \pm 1$이다. 두 경우 모두 $|a|^2 = r^2 \pm 1$이므로 C는 단위원(점선)과 직각으로 만난다(왼쪽 그림은 $a = \sqrt{2}$, $r = 1$이고 오른쪽 그림은 $a = \mathrm{i}\sqrt{3}$, $r = 2$이다).



a는 실수



a는 순허수

물론 a가 실수이면 음수일 수도 있고, 이때는 왼쪽 그림을 허수축에 대해 대칭이동한 그림이 된다. 마찬가지로 순허수 a가 실수축 아래에 있을 수도 있다.

소문항 (ii)

이번에는 $z = 1/\omega^*$이므로, Q가 자취 위에 있을 필요충분조건은

$$\left|\frac{1}{\omega^*} - a\right| = r \iff |1 - a\omega^*| = r|\omega^*| \iff |1 - a^*\omega| = r|\omega|,$$

이다. 여기서 첫째 절댓값(modulus) 안에 켤레(conjugate)를 취했다(어떤 수와 그 켤레복소수는 절댓값이 같다). 이것은 소문항 (i)의 방정식에서 a를 a^*로 바꾼 것이다. 따라서 소문항 (i)에 의해 자취는

$$\text{중심}\frac{a}{k}, \qquad \text{반지름}\frac{r}{|k|}, \qquad k = |a|^2 - r^2.$$

인 원이다. 이것이 C가 되려면 $|k| = 1$이고 $a/k = a$이어야 한다. $a \neq 0$이면 둘째 조건에서 $k = 1$이어야 하고, 조건은 이것이 전부이다. 즉 조건은 정확히

$$|a|^2 = r^2 + 1,$$

이고, 이는 a의 편각(argument)에 대해 아무것도 말해 주지 않는다. ($a = 0$이면 앞에서와 같이 $r = 1$이어야 한다.)

생각해 보기 실수도 아니고 순허수도 아닌 구체적인 a를 찾을 수 있는가?

$a = 1 + \mathrm{i}$, $r = 1$로 잡자. 그러면 $|a|^2 = 2 = r^2 + 1$이므로 Q의 자취는 C이지만, a는 실수도 아니고 순허수도 아니다. 따라서 답은 **아니다**. a가 반드시 실수이거나 순허수여야 하는 것은 아니다.

검산

- $a = \sqrt{5}$, $r = 2$일 때($|a|^2 - r^2 = 1$), C 위의 점 $z = \sqrt{5} \pm 2$는 $1/(\sqrt{5} \pm 2) = \sqrt{5} \mp 2$로 옮겨지고, 이 점들은 다시 C 위에 있다.

- 소문항 (ii)에서 $a = 1 + \mathrm{i}$, $r = 1$일 때, 점 $z = 1$은 C 위에 있고 $1/z^* = 1$도 그렇다. 점 $z = 2 + \mathrm{i}$에서는 $1/z^* = (2 + \mathrm{i})/5 = 0.4 + 0.2\mathrm{i}$이고, $|(0.4 + 0.2\mathrm{i}) - (1 + \mathrm{i})|^2 = 0.36 + 0.64 = 1$이다. 그러나 $1/z = 0.4 - 0.2\mathrm{i}$는 C 위에 있지 않으므로, 이 원은 소문항 (i)의 사상에 의해 고정되지 않는다.
- 두 소문항의 상인 원은 컴퓨터로도 확인하였다. 임의의 원 위의 많은 점을 사상으로 옮긴 다음, 예측한 중심으로부터의 거리를 측정하였다.

흔한 실수

- C'의 중심을 $a^*/(|a|^2 - r^2)$ 대신 $a/(|a|^2 - r^2)$로 쓰는 것. 중심을 읽어 내려면 ω의 계수가 아니라 ω^*의 계수가 필요하다.
- 반지름 $r/\big||a|^2 - r^2\big|$에서 절댓값을 빠뜨리는 것. 절댓값이 없으면 $|a| < r$인 경우 반지름이 음수가 된다.
- 켤레가 조건 $a^* = \pm a$를 없앤다는 사실을 알아채지 못하고, 소문항 (i)에서 유추하여 소문항 (ii)에 "그렇다"라고 답하는 것.

STEP 너머

사상 $z \mapsto 1/z^*$는 **단위원에 대한 반전**(*inversion in the unit circle*)이고, $z \mapsto 1/z$는 그 반전을 한 다음 실수축에 대해 대칭이동한 것이다. 둘 다 뫼비우스 변환(Möbius transformation)의 한 종류이며, 뫼비우스 변환은 언제나 원과 직선을 원과 직선으로 옮긴다. 소문항 (ii)는 어떤 원이 반전에 의해 고정될 필요충분조건은 그 원이 반전의 기준원과 직각으로 만나는 것, 즉 $|a|^2 = r^2 + 1$인 것(또는 그 원이 단위원 자체인 것)이라는 고전적인 사실이다. Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)는 이러한 아이디어를 그림과 함께 아름답게 전개한다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.