풀이

STEP III 2019, 문제 5

순수수학 • 치환적분

STEP III 2019, 5번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2019년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP III 시험지에 있다:

www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

핵심 아이디어

(i)의 함수는 $[0,\infty)$를 $[0,1)$ 위로 매끄럽게, 그리고 증가하면서(increasing) 보낸다. 따라서 이 함수에 상수를 곱해 크기를 조절하면 $[0,c)$의 일부 구간에서의 y에 대한 적분을 $[0,\infty)$의 일부 구간에서의 x에 대한 적분으로 바꿀 수 있다. 또한 이렇게 하면 c^2-y^2이 겉모습만 다를 뿐 사실상 완전제곱식이 되므로, 다루기 까다로운 제곱근이 사라진다. 제곱근이 없어지면 피적분함수(integrand)는 유리함수(rational function)가 되고, 이것은 주어진 참고 사항의 아크탄젠트(arctangent) 적분으로 계산할 수 있다. 역수 치환(reciprocal substitution) $y=1/u$는 뒤의 적분들을 첫 번째 적분과 연결해 준다.

풀이

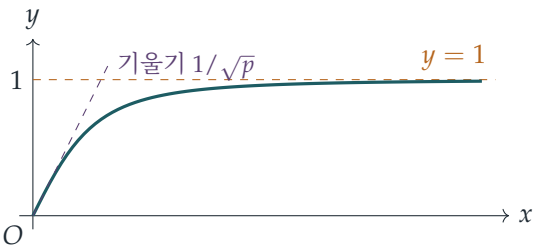
소문항 (i)

$f(x)=x(x^2+p)^{-1/2}$이고 $p>0$이면 $f(0)=0$이고

$$f'(x)=(x^2+p)^{-1/2}-x^2(x^2+p)^{-3/2}=\frac{p}{(x^2+p)^{3/2}}>0,$$

$$f''(x)=-\frac{3px}{(x^2+p)^{5/2}}<0 \quad \text{단, } x>0.$$

따라서 곡선은 기울기 $1/\sqrt{p}$로 원점을 출발하여 꾸준히 올라가며, 아래로 휘어진다(즉 위로 볼록한 오목(concave) 함수이다). $x>0$에서 $f(x)=1/\sqrt{1+p/x^2}$이므로 $x\to\infty$일 때 $f(x)\to 1$이 아래쪽에서 성립한다. 따라서 $y=1$은 곡선이 결코 닿지 않는 점근선(asymptote)이다.



소문항 (ii)

문제지에 인쇄된 치환(substitution)은 분자에 b가 있다. 이것으로는 풀리지 않는다. b^2-y^2은 깔끔해지지만 $c^2(x^2+p)-b^2x^2$의 제곱근이 남는데, 이것은 완전제곱식이 아니기 때문이다. 실제로 통하는 치환(그리고 출제자가 의도한 치환)은 분자에 c가 있는 것이다.

$$y=\frac{cx}{\sqrt{x^2+p}}, \qquad p>0.$$

소문항 (i)에 의해 이것은 $x\in[0,\infty)$를 $y\in[0,c)$ 위로 보내는 증가하는 사상이고, 이 범위는 바로 $\sqrt{c^2-y^2}$이 정의되는 범위이다. 이제

$$\begin{aligned} c^2-y^2 &= \frac{c^2(x^2+p)-c^2x^2}{x^2+p} = \frac{c^2p}{x^2+p}, \\ b^2-y^2 &= \frac{b^2p+(b^2-c^2)x^2}{x^2+p}, \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{cp}{(x^2+p)^{3/2}} \quad \text{(소문항 (i)에서).} \end{aligned}$$

$c>0$이고 $p>0$이므로 $\sqrt{c^2-y^2}=c\sqrt{p}/\sqrt{x^2+p}$이다. 이를 대입하면

$$I=\int \frac{x^2+p}{b^2p+(b^2-c^2)x^2}\cdot\frac{\sqrt{x^2+p}}{c\sqrt{p}}\cdot\frac{cp}{(x^2+p)^{3/2}}\,\mathrm{d}x=\int\frac{\sqrt{p}}{b^2p+(b^2-c^2)x^2}\,\mathrm{d}x.$$

$p=1$로 택하면

$$I=\int\frac{1}{b^2+(b^2-c^2)x^2}\,\mathrm{d}x,$$

이고, 이것이 구하는 결과이다. 치환은 $y=cx/\sqrt{x^2+1}$이고, 그 역은 $x=y/\sqrt{c^2-y^2}$이다.

첫 번째 적분. $b=\sqrt{3}, c=\sqrt{2}$로 놓는다. 그러면 $x=y/\sqrt{2-y^2}$이므로 $y=1$이면 $x=1$이고, $y\to\sqrt{2}$일 때 $x\to\infty$이다. 원래의 피적분함수는 $y=\sqrt{2}$에서 $(2-y^2)^{-1/2}$처럼 발산하는데, 이것은 적분 가능하다. 치환한 뒤의 적분은 $[1,\infty)$에서 수렴하는 이상적

분(improper integral)이다.

$$\int_1^{\sqrt{2}} \frac{\mathrm{d}y}{(3-y^2)\sqrt{2-y^2}} = \int_1^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{3+x^2} = \frac{1}{\sqrt{3}}\Big[\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{3}}\Big]_1^{\infty}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\Big(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\Big) = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

생각해 보기 새 적분에는 예전 적분의 $3-y^2$과 $2-y^2$ 자리에 $3y^2-1$과 $2y^2-1$이 있다. 어떤 치환을 하면 y^2과 상수의 역할이 서로 바뀔까?

두 번째 적분. $u>0$인 $y=1/u$로 놓으면 $\mathrm{d}y = -\mathrm{d}u/u^2$이다. 그러면

$$3y^2-1 = \frac{3-u^2}{u^2}, \qquad \sqrt{2y^2-1} = \frac{\sqrt{2-u^2}}{u},$$

이고, 적분 구간의 끝 $y=\frac{1}{\sqrt{2}}$와 $y=1$은 각각 $u=\sqrt{2}$와 $u=1$이 된다. 따라서

$$\int_{1/\sqrt{2}}^{1} \frac{y\,\mathrm{d}y}{(3y^2-1)\sqrt{2y^2-1}} = \int_{\sqrt{2}}^{1} \frac{1}{u}\cdot\frac{u^2}{3-u^2}\cdot\frac{u}{\sqrt{2-u^2}}\cdot\Big(-\frac{\mathrm{d}u}{u^2}\Big) = \int_1^{\sqrt{2}} \frac{\mathrm{d}u}{(3-u^2)\sqrt{2-u^2}}.$$

이것은 첫 번째 적분과 정확히 같으므로, 그 값 역시 $\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$이다.

소문항 (iii)

같은 역수 치환 $y=1/u$를 쓰면 피적분함수는 $u/\big((3-u^2)\sqrt{2-u^2}\big)$이 된다. 이번에는 여분의 인수 u가 있으므로 $w=\sqrt{2-u^2}$로 치환하고 싶어진다. 그러면 $3-u^2 = 1+w^2$이기 때문이다. 두 단계를 합치면 하나의 치환이 된다.

$$w = \frac{\sqrt{2y^2-1}}{y} = \sqrt{2-\frac{1}{y^2}}, \qquad \text{따라서} \qquad w^2 = 2-\frac{1}{y^2}, \quad 2w\,\mathrm{d}w = \frac{2}{y^3}\,\mathrm{d}y.$$

$y\in[\frac{1}{\sqrt{2}},1]$에서 w는 0에서 1까지 증가한다. 또한 $\mathrm{d}y = wy^3\,\mathrm{d}w$, $\sqrt{2y^2-1} = wy$이고 $3y^2-1 = y^2\big(3-\frac{1}{y^2}\big) = y^2(1+w^2)$이다. 따라서

$$\int_{1/\sqrt{2}}^{1} \frac{\mathrm{d}y}{(3y^2-1)\sqrt{2y^2-1}} = \int_0^1 \frac{wy^3\,\mathrm{d}w}{y^2(1+w^2)\cdot wy} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}w}{1+w^2} = \frac{\pi}{4}.$$

($y=1/\sqrt{2}$에서의 특이점(singularity)도 역시 적분 가능한 $(2y^2-1)^{-1/2}$ 꼴일 뿐이며, 치환하면 사라진다.)

이것은 사실 소문항 (ii)의 방법이 모습만 바뀐 것이다. $x=1/w$로 쓰면 $y = x/\sqrt{2(x^2-1)}$이 되는데, 이것은 $c^2=\frac{1}{2}$, $p=-1$인 일반적인 치환이다. 소문항 (i)에서 p가 음수인 경우도 허용한 것은 이 때문이다.

검산

- $\pi/(3\sqrt{3}) \approx 0.6046$이고 $\pi/4 \approx 0.7854$이다. 두 값 모두, 끝점의 특이점을 매끄럽게 하기 위해 삼각치환을 한 뒤 원래 적분을 수치적분하여 확인하였다.
- 첫 번째 적분의 대략적인 크기 확인: $[1, \sqrt{2}]$에서 $1 \leq 3 - y^2 \leq 2$이므로, 적분값은 $\int_1^{\sqrt{2}} (2 - y^2)^{-1/2}\,\mathrm{d}y = \frac{\pi}{4}$의 $\frac{1}{2}$배와 1배 사이에 있다. 이로부터 0.39에서 0.79까지의 범위를 얻고, 0.6046은 이 범위 안에 여유 있게 들어간다.
- 소문항 (ii)의 항등식을 한 점에서 확인한다. $b = \sqrt{3}$, $c = \sqrt{2}$, $x = 1$이면 $y = 1$이다. 피적분함수의 값은 $\frac{1}{2}$, $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = \sqrt{2}/2^{3/2} = \frac{1}{2}$이고, 둘의 곱은 예상대로 $\frac{1}{4} = 1/(3+1)$이다.

흔한 실수

- 문제지에 인쇄된 대로 b를 넣은 치환을 고집하다가 막히는 경우: 없애야 할 제곱근은 $\sqrt{c^2 - y^2}$이므로, 크기를 조절하는 상수는 c여야 한다.
- 적분 구간의 끝을 잘못 바꾸는 경우. 여기서 $y = \sqrt{2} = c$는 유한한 x 값이 아니라 $x = \infty$에 대응한다.
- $\mathrm{d}y = -\mathrm{d}u/u^2$에서 음의 부호를 빠뜨리거나, 적분 구간의 끝을 다시 바꾸어 놓는 것을 잊는 경우. 그러면 피적분함수가 양수인데도 답이 음수가 된다.

STEP 너머

여기서 쓴 치환은 유리화 치환(rationalising substitution)이다. 이차식의 제곱근이 들어 있는 피적분함수를 유리함수로 바꾸어 주며, 그다음에는 부분분수(partial fractions)나 $\tan^{-1}$으로 마무리하면 된다. 대학 1학년 해석학(analysis)에서는 여기서 사용한 이상적분의 이론적 배경을 배운다. 적분 구간의 끝이 무한대이거나 피적분함수가 유계가 아닌 적분이 언제 수렴하는지, 그리고 그런 적분에서도 왜 치환적분이 여전히 성립하는지를 다룬다. Bartle과 Sherbert의 *Introduction to Real Analysis*(실해석학 입문)가 이 두 가지를 꼼꼼하게 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.