풀이

# STEP III 2019, 문제 4

순수수학 • 근과 계수

> **STEP III 2019, 4번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2019년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP III 시험지에 있다:
>
> www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

## 핵심 아이디어

번갈아 나타나는 부호는 정확히 비에트 공식(Vieta's formulas)의 부호이다. 근이 $r_1, \ldots, r_n$인 최고차항의 계수가 1인 다항식(monic polynomial)은 $x^n - e_1 x^{n-1} + e_2 x^{n-2} - \cdots + (-1)^n e_n$이고, 여기서 $e_k$는 근 가운데 $k$개를 곱한 것을 모두 더한 값이다. 따라서 "반사적(reflexive)"이라는 말은 모든 $k$에 대하여 $e_k(a_1, \ldots, a_n) = a_k$라는 뜻일 뿐이다. 그러면 작은 경우는 몇 개의 연립방정식(simultaneous equations)이 되고, 근의 제곱의 합 $e_1^2 - 2e_2$에서 (ii)의 항등식이 나온다. 일단 $a_n = 0$이 강제되면 인수 $x$가 빠져나오므로 다항식을 한 겹씩 벗겨 낼 수 있다.

## 풀이

이 풀이 전체에서 $e_k$는 $a_1, \ldots, a_n$의 $k$차 기본 대칭함수(elementary symmetric function)를 나타낸다. 비에트 공식에 의하여, P의 근이 $a_1, \ldots, a_n$일 필요충분조건은

$$e_k(a_1, \ldots, a_n) = a_k \qquad \text{단, } k = 1, 2, \ldots, n.$$

이다.

### 소문항 (i)

**1차.** $\mathrm{P}(x) = x - a_1$의 근은 $a_1$이므로, 이러한 다항식은 모두 반사적이다. 즉 임의의 실수 $a$에 대하여 $\mathrm{P}(x) = x - a$이다.

**2차.** $a_1 + a_2 = a_1$이고 $a_1 a_2 = a_2$이어야 한다. 첫째 식에서 $a_2 = 0$이고, 그러면 둘째 식은 저절로 성립한다. 따라서 임의의 실수 $a$에 대하여 $\mathrm{P}(x) = x^2 - ax = x(x - a)$이다. 실제로 그 근 $a$와 0은 $a_1$과 $a_2$이다.

**3차.** 다음이 성립해야 한다.

$$a_1 + a_2 + a_3 = a_1,$$
$$a_1a_2 + a_1a_3 + a_2a_3 = a_2,$$
$$a_1a_2a_3 = a_3.$$

첫째 식에서 $a_3 = -a_2$이다. 그러면 둘째 식은 $a_1(a_2 + a_3) + a_2a_3 = a_2$, 즉 $-a_2^2 = a_2$가 되므로 $a_2 = 0$ 또는 $a_2 = -1$이다.

- $a_2 = 0$이면 $a_3 = 0$이고 셋째 식은 $0 = 0$이 된다. 따라서 $a_1$은 임의의 값이다. 즉 $\mathrm{P}(x) = x^3 - ax^2 = x^2(x - a)$이다.
- $a_2 = -1$이면 $a_3 = 1$이고 셋째 식에서 $-a_1 = 1$이므로 $a_1 = -1$이다. 이로부터

  $$\mathrm{P}(x) = x^3 + x^2 - x - 1 = (x + 1)^2(x - 1),$$

  을 얻고, 실제로 그 근 $-1, -1, 1$은 $a_1, a_2, a_3$이다.

따라서 차수가 3 이하인 반사적 다항식은

$$x - a, \qquad x^2 - ax, \qquad x^3 - ax^2 \quad (a \in \mathbb{R}), \qquad \text{그리고} \qquad x^3 + x^2 - x - 1.$$

이다.

### 소문항 (ii)

근의 제곱의 합은

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 = e_1^2 - 2e_2,$$

이다. $e_1$을 제곱하면 각 $a_i^2$은 한 번씩, 각 곱 $a_ia_j$ $(i < j)$는 두 번씩 나오기 때문이다. 반사적 다항식에서는 $e_1 = a_1$이고 $e_2 = a_2$이므로

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 = a_1^2 - 2a_2, \qquad \text{즉} \qquad 2a_2 = -a_2^2 - a_3^2 - \cdots - a_n^2,$$

이고, 이것이 증명하려던 식이다. (이는 모든 $n \geq 2$에 대하여 성립한다.)

이제 $a_k$가 정수이고 $a_n \neq 0$이라 하고, 모순을 이끌어 내기 위해 $n > 3$이라고 가정하자. $a_2^2$을 반대쪽으로 옮기고 완전제곱식을 만들면

$$(a_2 + 1)^2 = 1 - \left(a_3^2 + a_4^2 + \cdots + a_n^2\right).$$

이다.

? **생각해 보기** 정수라는 조건은 이 등식을 어떻게 옥죄는가?

좌변은 0 이상이므로 $a_3^2 + \cdots + a_n^2 \leq 1$이다. 그런데 $a_n$은 0이 아닌 정수이므로 $a_n^2 \geq 1$이다. 따라서 그 합은 정확히 1이다. 즉 $a_n^2 = 1$이고 나머지 항은 모두 0이므로 $a_3 = a_4 = \cdots = a_{n-1} = 0$이며, 또한 $a_2 = -1$이다. $n \geq 4$이므로 $a_3, \ldots, a_{n-1}$은 비어 있지 않고, 특히 $a_3 = 0$이다. 이제 비에트 공식의 마지막 식은 근의 곱이 $a_n$이라는 것을 말해 준다.

$$a_n = e_n = a_1 a_2 a_3 \cdots a_n = 0,$$

$a_3 = 0$이기 때문이다. 이는 $a_n \neq 0$에 모순이다. 그러므로 $n \leq 3$이다.

#### 소문항 (iii)

**인수 $x$ 떼어 내기.** P가 차수 $n \geq 2$인 반사적 다항식이고 $a_n = 0$이라 하자. 그러면 $\mathrm{P}(x) = x\mathrm{Q}(x)$이고, 여기서

$$\mathrm{Q}(x) = x^{n-1} - a_1 x^{n-2} + \cdots + (-1)^{n-1} a_{n-1}.$$

이다. P의 근은 $a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$이고 $a_n = 0$이며, 인수 $x$가 근 0 하나를 차지한다. 따라서 Q의 근은 나머지인 $a_1, \ldots, a_{n-1}$이다. 즉 Q는 같은 (정수) 계수를 가진 반사적 다항식이다. 역으로, Q가 계수 $a_1, \ldots, a_m$을 가진 차수 $m$의 반사적 다항식이면, $x\mathrm{Q}(x)$의 계수는 $a_1, \ldots, a_m, 0$이고 근은 $a_1, \ldots, a_m, 0$이므로 이것 역시 반사적이다.

**한 겹씩 벗겨 내기.** 정수 계수를 가진 임의의 반사적 다항식 P에서 출발하자. 차수가 2 이상이고 마지막 계수가 0인 동안 인수 $x$를 떼어 낸다. 이 과정은 $\mathrm{P}(x) = x^m \mathrm{R}(x)$에서 멈추는데, 여기서 $m \geq 0$이고 R은 차수 $k$인 정수 계수 반사적 다항식으로서 $k = 1$이거나 마지막 계수 $a_k$가 0이 아니다.

- $a_k \neq 0$이면 소문항 (ii)에 의하여 $k \leq 3$이다 ($k \leq 3$이면 증명할 것이 없다). 소문항 (i)의 목록에서, $k = 1$이면 $a \neq 0$인 $x - a$를 얻고, $k = 2$이면 마지막 계수가 항상 0이므로 해당하는 것이 없으며, $k = 3$이면 $a_3 \neq 0$인 것은 $x^3 + x^2 - x - 1$뿐이다.
- $k = 1$이고 $a_1 = 0$이면 $\mathrm{R}(x) = x$이다.

$\mathrm{R}(x) = x$를 $a = 0$인 $x - a$의 경우에 포함시키고, 앞의 역을 이용하여 $x^m$을 곱한 것이 모두 반사적임을 확인하면, 정수 계수를 가진 반사적 다항식은 정확히 다음과 같다.

$$x^m(x - a) \quad (m \geq 0,\ a \in \mathbb{Z}),$$
$$x^m(x^3 + x^2 - x - 1) = x^m(x+1)^2(x-1) \quad (m \geq 0).$$

## 검산

- $x^2(x+1)^2(x-1) = x^5 + x^4 - x^3 - x^2$의 계수는 $a_1, \ldots, a_5 = -1, -1, 1, 0, 0$이고 근은 $-1, -1, 1, 0, 0$이므로 반사적이다. (ii)의 항등식은 $2(-1) = -(1 + 1 + 0 + 0)$이 되어 성립한다.

- $n \leq 7$이고 $a_1, \ldots, a_n$이 $\{-3, \ldots, 3\}$의 정수인 모든 경우를 컴퓨터로 탐색한 결과, 위에 나열한 것 외의 반사적 다항식은 찾지 못하였다. 또 $n = 2, 3$에 대하여 작은 유리수 범위를 탐색하여 소문항 (i)의 목록을 확인하였다.

## 흔한 실수

- 자유 매개변수를 가진 족을 빠뜨리는 것. $x^2 - ax$와 $x^3 - ax^2$은 특정한 값뿐 아니라 모든 실수 $a$에 대하여 반사적이다.
- (ii)에서 $a_n = \pm 1$, $a_2 = -1$을 찾고 거기서 멈추는 것. 모순은 근의 곱에서 나오는데, $n \geq 4$이면 $a_3, \ldots, a_{n-1}$ 가운데 0인 것이 있으므로 이 곱이 0이 된다.
- (iii)에서 몫이 다시 반사적인지 확인하지 않고 "$a_n = 0$이므로 $x$로 나눈다"라고만 말하는 것. 0인 근 하나는 인수 $x$와 짝을 이루고, 나머지 근은 나머지 계수와 일치해야 한다.

## STEP 너머

방정식 $e_k(a_1, \ldots, a_n) = a_k$는 해집합이 대수다양체(algebraic variety)를 이루는 다항식 연립방정식의 작은 예이며, 여기서 그 다양체는 직선들과 고립된 점들의 합집합이다. "제곱의 합 $= e_1^2 - 2e_2$"라는 사실은 뉴턴 항등식(Newton's identities)의 첫 번째 식으로, 이 항등식들은 근의 거듭제곱 합을 계수와 연결하며 대칭함수 이론의 바탕이 된다. "제곱수인 정수들의 합이 1 이하"라는 단계는 디오판토스(Diophantine) 논증에서 전형적으로 쓰이는 수법이다. Davenport의 *The Higher Arithmetic*과 Allenby의 *Rings, Fields and Groups*는 이러한 아이디어를 더 탐구하기에 좋은 책이다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.