풀이

STEP III 2019, 문제 3

순수수학 • 행렬의 불변 직선

STEP III 2019, 3번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2019년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP III 시험지에 있다:

www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

핵심 아이디어

점 (x, y)가 불변점(invariant point)이 될 필요충분조건은 $(\mathbf{A} - \mathbf{I})$가 그 점을 영벡터로 보내는 것이고, 이로부터 두 개의 일차방정식을 얻는다. 소문항 (i)과 (ii)의 모든 내용은 이 두 방정식이 언제 같은 직선을 나타내는지를 묻는 데서 나오며, 그 조건은 $(a-1)(d-1) = bc$, 즉 $\det(\mathbf{A} - \mathbf{I}) = 0$이다. 소문항 (iii)에서는 직선 위의 일반적인 점을 변환에 대입하고 계수를 비교(compare coefficients)한다.

풀이

소문항 (i)

점 (x, y)가 불변점이라는 것은 $ax + by = x$이고 $cx + dy = y$라는 것, 즉

$$(a-1)x = -by, \tag{1}$$

$$(d-1)y = -cx. \tag{2}$$

라는 것이다. (1)과 (2)를 변끼리 곱하면 $(a-1)(d-1)xy = bc\,xy$이므로, L_1 위의 모든 점 (x, y)에 대하여

$$((a-1)(d-1) - bc)xy = 0$$

이 성립한다. 이것이 증명하려던 것이다.

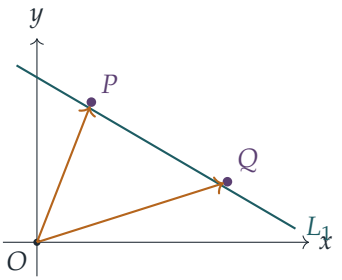
두 번째 결과를 위해서는 xy로 나눌 수 있도록 $xy \neq 0$인 L_1 위의 점이 필요하다.

생각해 보기 L_1 위의 모든 점에서 $x = 0$ 또는 $y = 0$이라면 어떻게 될까?

집합 $xy = 0$은 두 좌표축일 뿐이다. 두 좌표축의 합집합 안에 놓인 직선은 둘 중 하나의 축이어야 하므로, L_1이 좌표축이 아니라면 $xy \neq 0$인 점을 포함한다. 이때 xy로 나누면 $(a-1)(d-1) = bc$를 얻는다.

이제 좌표축인 경우가 남는다. L_1이 y축이면 모든 $(0, y)$가 불변점이므로, (1)과 (2)에서 모든 y에 대하여 $by = 0$이고 $(d-1)y = 0$이다. 따라서 $b = 0, d = 1$이고, $(a-1)(d-1) = bc$의 양변은 모두 0이다. L_1이 x축이면 같은 방법으로 $c = 0, a = 1$이고, 역시 양변이 모두 0이다. 따라서 모든 경우에 $(a-1)(d-1) = bc$이다.

이제 L_1이 원점을 지나지 않는다고 하자. L_1 위의 서로 다른 두 점 P, Q를 잡고, 그 위치벡터(position vector)를 각각 $\mathbf{p}, \mathbf{q}$라 하자.



O, P, Q는 한 직선 위에 있지 않으므로 $\mathbf{p}$와 $\mathbf{q}$는 평행하지 않고, 따라서 모든 벡터는 $\mathbf{v} = \lambda\mathbf{p} + \mu\mathbf{q}$ 꼴로 나타낼 수 있다. 선형성(linearity)에 의하여

$$\mathbf{Av} = \lambda\mathbf{Ap} + \mu\mathbf{Aq} = \lambda\mathbf{p} + \mu\mathbf{q} = \mathbf{v},$$

이므로 평면 위의 모든 점이 불변점이고 $\mathbf{A} = \mathbf{I}$이다. (이때 $a = d = 1, b = c = 0$이므로 $(a-1)(d-1) = bc$와도 일치한다.)

소문항 (ii)

$(a-1)(d-1) = bc$라고 하자. (1)과 (2)가 모두 성립하는 직선을 찾아야 한다.

$b \neq 0$인 경우. 직선 $(a-1)x + by = 0$을 생각하자. $b \neq 0$이므로 이것은 원점을 지나는 진짜 직선이다. 이 직선 위의 모든 점은 (1)을 만족한다. 이 직선 위에서 $y = -\frac{(a-1)x}{b}$이므로

$$cx + (d-1)y = cx - \frac{(a-1)(d-1)}{b}\,x = cx - \frac{bc}{b}\,x = 0,$$

이고, (2)도 성립한다. 따라서 $(a-1)x + by = 0$은 불변점으로 이루어진 직선이다.

$b = 0$인 경우. 이때 조건은 $(a-1)(d-1) = 0$이 되므로 $a = 1$ 또는 $d = 1$이다.

- $a \neq 1$이면 $d = 1$이다. 방정식 (1)은 $(a-1)x = 0$이 되어 $x = 0$이고, (2)는 $cx = 0$이 되는데 이는 $x = 0$일 때 성립한다. 불변점으로 이루어진 직선은 y축 $x = 0$이다.

- $a = 1$이면 (1)은 모든 점에서 성립하므로 (2), 즉 $cx + (d-1)y = 0$만 확인하면 된다.
  - c와 $d-1$이 동시에 0은 아니면, 이것은 원점을 지나는 직선이고 불변점으로 이루어진 직선이다.
  - $c = 0$이고 $d = 1$이면 $\mathbf{A} = \mathbf{I}$이므로 모든 점이 불변점이고, 모든 직선이 불변점으로 이루어진 직선이다.

따라서 $(a-1)(d-1) = bc$이면 항상 불변점으로 이루어진 직선이 존재한다.

소문항 (iii)

L_2는 원점을 지나지 않으므로 $k \neq 0$인 $y = mx + k$로 쓸 수 있다. L_2 위의 일반적인 점은 $(x, mx+k)$이고, 그 상은

$$(X, Y) = \big((a+bm)x + bk,\ (c+dm)x + dk\big).$$

이다. 이 직선이 불변직선(invariant line)일 필요충분조건은 모든 실수 x에 대하여 $Y = mX + k$인 것이다.

$$(c+dm)x + dk = m(a+bm)x + mbk + k.$$

양변은 모두 x에 대한 일차식이고 모든 x에 대하여 같으므로, 계수가 같아야 한다.

$$\text{상수항:}\quad dk = mbk + k, \tag{3}$$

$$\text{계수 비교, } x:\quad c + dm = am + bm^2. \tag{4}$$

생각해 보기 L_2가 원점을 지나지 않는다는 사실은 어디에서 쓰일까?

그 사실은 (3)에서 쓰인다. $k \neq 0$이므로 k로 나눌 수 있고, 그러면 $d - 1 = mb$를 얻는다. $d = 1 + mb$를 (4)에 대입하면

$$c = am + bm^2 - dm = am + bm^2 - m - bm^2 = m(a-1).$$

이다. 따라서

$$bc = bm(a-1) = (d-1)(a-1),$$

이고, 이것이 증명하려던 결과이다. ($k = 0$이면 방정식 (3)에서 아무 정보도 얻을 수 없다. 이 때문에 원점을 지나는 직선은 이 조건 없이도 불변직선이 될 수 있다. 그 예로 π만큼의 회전(rotation)이 있는데, 이 변환은 O를 지나는 모든 직선을 자기 자신으로 보내지만 $(a-1)(d-1) = 4 \neq 0 = bc$이다.)

검산

- $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$을 시험해 보자. 이때 $(a-1)(d-1) = -2 = bc$이다. 소문항 (ii)에 따르면 불변직선은 $2x + 2y = 0$, 즉 $y = -x$이고, 실제로 $\mathbf{A}(1,-1)^{\mathrm{T}} = (1,-1)^{\mathrm{T}}$이다.
- 소문항 (iii)에 대하여 $m = 2$, $k = 1$, $a = 3$, $b = 1$로 잡자. 그러면 $d = 1 + mb = 3$이고 $c = m(a-1) = 4$이다. $y = 2x + 1$ 위의 점 $(1,3)$은 $(6,13)$으로 옮겨지고, $13 = 2 \times 6 + 1$이다. 또한 $(a-1)(d-1) = 4 = bc$이다.
- 컴퓨터로 수천 개의 무작위 행렬을 확인하였다. 찾아낸 $k \neq 0$인 불변직선 $y = mx + k$는 모두 $d - 1 = mb$, $c = m(a-1)$, $(a-1)(d-1) = bc$를 만족하였고, 원점을 지나지 않는 고정점들의 직선은 모두 $\mathbf{A} = \mathbf{I}$에서 나왔다.

흔한 실수

- 소문항 (i)에서 L_1이 좌표축인 경우를 다루지 않고 xy로 나누는 것.
- 소문항 (ii)의 $b = 0$인 경우에서 하위 경우를 빠뜨리는 것. 특히 모든 직선이 조건을 만족하는 $\mathbf{A} = \mathbf{I}$인 경우를 빠뜨리기 쉽다.
- 소문항 (iii)에서 **불변직선**(점들이 직선 위에 머무름)과 **불변점으로 이루어진 직선**(점들이 제자리에 머무름)을 혼동하여 $X = x$로 놓는 것.

STEP 너머

조건 $(a-1)(d-1) = bc$는 $\det(\mathbf{A} - \mathbf{I}) = 0$, 즉 행렬식(determinant) 조건이며, 이는 1이 $\mathbf{A}$의 고윳값(eigenvalue)이라는 뜻이다. 이때 원점을 지나는 불변점으로 이루어진 직선은 그 고윳값에 대한 고유공간(eigenspace)이다. 소문항 (iii)은 원점을 지나지 않는 불변직선이 있어도 고윳값 1이 반드시 존재함을 보여 준다. 관계식 $c = m(a-1)$과 $d - 1 = mb$는 $\mathbf{A} - \mathbf{I}$의 둘째 행이 첫째 행의 m배라는 뜻이므로, $\mathbf{A} - \mathbf{I}$의 랭크(rank)는 많아야 1이고 모든 점을 L_2에 평행한 방향으로 움직인다. 고윳값, 고유벡터(eigenvector), 그리고 선형사상(linear map)의 기하는 Strang, *Introduction to Linear Algebra*(선형대수학 입문)에서 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.