풀이

STEP III 2019, 문제 2

순수수학 • 함수방정식

> **STEP III 2019, 2번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2019년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP III 시험지에 있다:
>
> www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

이 문제는 *Beyond STEP*의 3.8 절 **덧셈 법칙으로 정해지는 함수**에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch03/addition-laws.html

핵심 아이디어

함수방정식(functional equation)은 함수가 한 점 근처에서 어떻게 행동하는지만 알면 그 함수에 대한 모든 것을 알려 준다. $x = y = 0$을 대입하면 0에서의 값이 정해진다. 그다음 일반적인 x에서 차분몫(difference quotient)을 쓰고 함수방정식을 이용하면, 이것이 0에서의 차분몫으로 바뀌는데, 그 극한이 k임은 이미 알고 있다. 이로부터 미분방정식(differential equation)을 얻고, 앞에서 찾은 초깃값(initial value)을 이용하여 이를 푼다.

풀이

소문항 (i)

0에서의 값. 함수방정식에 $x = y = 0$을 대입하면 $f(0) = f(0)^2$이므로 $f(0) = 0$ 또는 $f(0) = 1$이다.

$f(0) = 0$이라고 하자. 그러면 $y = 0$을 대입하여 모든 x에 대해 $f(x) = f(x)f(0) = 0$을 얻으므로, f는 영함수(zero function)이고 $f'(0) = 0$이다. 이는 $f'(0) = k \neq 0$에 모순이다. 따라서 $f(0) = 1$이다.

도함수. $(*)$와 $y = h$로 둔 함수방정식으로부터

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x)f(h) - f(x)}{h} = f(x) \lim_{h\to 0} \frac{f(h) - 1}{h}.$$

$f(0) = 1$이므로 마지막 극한은 $\lim_{h\to 0} \dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}$이고, 이는 $x = 0$에서의 $(*)$에 의해 $f'(0) = k$이다. 따라서

$$f'(x) = k\,f(x),$$

이 되어 원하는 결과를 얻는다. ($f(x)$는 h에 의존하지 않으므로 극한 밖으로 꺼낼 수 있었다.)

풀기. f로 나누는 대신(그러려면 $f \neq 0$이어야 한다) $u(x) = e^{-kx}f(x)$를 생각한다. 그러면

$$u'(x) = e^{-kx}\big(f'(x) - k\,f(x)\big) = 0,$$

이므로 u는 상수이고, 그 값은 $u(0) = f(0) = 1$이다. 따라서

$$f(x) = e^{kx}.$$

이 함수는 실제로 모든 조건을 만족한다. $e^{k(x+y)} = e^{kx}e^{ky}$이고, 0에서의 미분계수는 k이다.

소문항 (ii)

0에서의 값. $x = y = 0$을 대입하면

$$g(0) = \frac{2g(0)}{1+g(0)^2} \quad\Longrightarrow\quad g(0)\big(g(0)^2 - 1\big) = 0,$$

이므로 $g(0) \in \{0, 1, -1\}$이다. 모든 x에 대해 $|g(x)| < 1$이므로 $g(0) = 0$이어야 한다. 또한 $|g| < 1$이면 $1 + g(x)g(y) > 0$이 보장되므로, 함수방정식에서 0으로 나누는 일은 결코 생기지 않는다는 점에도 주목하자.

차분몫. $y = h$로 둔 함수방정식을 이용하고 모든 항을 하나의 분모로 통분하면

$$g(x+h) - g(x) = \frac{g(x) + g(h) - g(x) - g(x)^2 g(h)}{1 + g(x)g(h)} = \frac{g(h)\big(1 - g(x)^2\big)}{1 + g(x)g(h)}.$$

h로 나누면

$$\frac{g(x+h)-g(x)}{h} = \big(1 - g(x)^2\big) \cdot \frac{g(h)}{h} \cdot \frac{1}{1 + g(x)g(h)}.$$

? **생각해 보기** $h \to 0$일 때 우변의 각 인수는 어떻게 되는가?

첫 번째 인수는 h를 포함하지 않는다. $g(0) = 0$이므로 가운데 인수는 $\dfrac{g(0+h)-g(0)}{h}$이고, 이는 $g'(0) = k$로 수렴한다. 마지막 인수에 대해서는 $g(h) \to g(0) = 0$이 필요하다. 이것은 g가 0에서 미분가능(differentiable)하므로 연속(continuous)이기 때문에 성립한다. 따라서 마지막 인수는 1로 수렴하고,

$$g'(x) = k\big(1 - g(x)^2\big).$$

풀기. $|g(x)| < 1$이므로 인수 $1 - g(x)^2$는 결코 0이 아니다. 따라서 변수분리(separation of variables)를 할 수 있다.

$$\int \frac{dg}{1-g^2} = \int k\,dx.$$

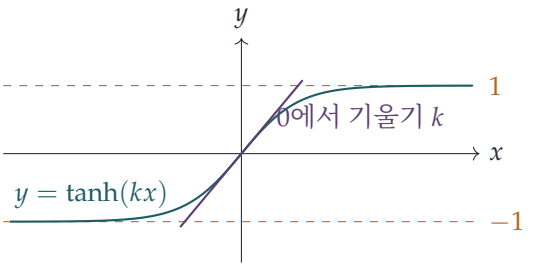
부분분수(partial fractions)로 분해하면 $\frac{1}{1-g^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+g} + \frac{1}{1-g}\right)$이고, $1 \pm g$는 둘 다 양수이므로

$$\frac{1}{2}\ln\frac{1+g(x)}{1-g(x)} = kx + c.$$

$x = 0$에서 좌변은 $\frac{1}{2}\ln 1 = 0$이므로 $c = 0$이다. 따라서 $\frac{1+g}{1-g} = e^{2kx}$이고, 이를 g에 대해 풀면

$$g(x) = \frac{e^{2kx}-1}{e^{2kx}+1} = \tanh(kx).$$

이 함수는 실제로 조건을 만족한다. $|\tanh(kx)| < 1$이고, 덧셈정리(addition formula) $\tanh(a+b) = \frac{\tanh a + \tanh b}{1 + \tanh a \tanh b}$가 바로 주어진 함수방정식이며, $\tanh(kx)$의 0에서의 미분계수는 k이다.



검산

- (i)에서 $f(x) = e^{kx}$, $k = 1$, $x = 0.3$, $y = 0.5$로 두면 $e^{0.3}e^{0.5} = 1.3499 \times 1.6487 = 2.2255 = e^{0.8}$이다.
- (ii)에서 $k = 1$, $x = 0.3$, $y = 0.5$로 두면 $\tanh 0.3 = 0.29131$, $\tanh 0.5 = 0.46212$이고, $(0.29131 + 0.46212)/(1 + 0.29131 \times 0.46212) = 0.66404 = \tanh 0.8$이다.
- 두 답 모두 무작위로 고른 많은 k, x, y에 대해 컴퓨터로도 확인하였으며, 도함수 관계식 $f' = kf$와 $g' = k(1-g^2)$도 함께 확인하였다.
- 두 소문항은 서로 연결되어 있다. $\tanh(kx) = \frac{e^{2kx}-1}{e^{2kx}+1}$은 소문항 (i)의 지수함수에서 k 대신 $2k$를 넣어 만든 것이다.

흔한 실수

- 이유 없이 $f(0) = 0$이나 $g(0) = \pm 1$을 버리는 것. 조건 $k \neq 0$과 $|g| < 1$은 바로 이 경우들을 배제하기 위해 주어진 것이다.
- 이유를 말하지 않고 분모 안에서 $g(h) \to 0$으로 보내는 것. 이를 위해서는 g가 0에서 연속이어야 하며, 이는 미분가능성에서 나온다.
- f나 $1 - g^2$가 0이 아닌지 확인하지 않고 그것으로 나누는 것.

STEP 너머

이것들은 **코시**(*Cauchy*)**형 함수방정식**의 예이다. 해석학(analysis) 첫 강좌에서는 지수 방정식 $f(x + y) = f(x)f(y)$가 미분가능성보다 훨씬 약한 가정, 예를 들어 한 점에서의 연속성만으로도 $f(x) = e^{kx}$(또는 $f \equiv 0$)를 강제한다는 것을 보이며, 반면 아무런 정칙성(regularity)도 가정하지 않으면 기괴한 해들이 존재한다. tanh 방정식은 특수 상대성 이론(special relativity)에서의 속도 덧셈 법칙으로, 여기서는 속도의 $\tanh^{-1}$ 값(빠르기, rapidity)이 단순히 더해진다. 이 뒤에 있는 해석학에 대해서는 Abbott, *Understanding Analysis*(해석학 입문서)를 참고하라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.