풀이

STEP III 2019, 문제 10

역학 • 비스듬한 충돌

STEP III 2019, 10번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2019년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP III 시험지에 있다:

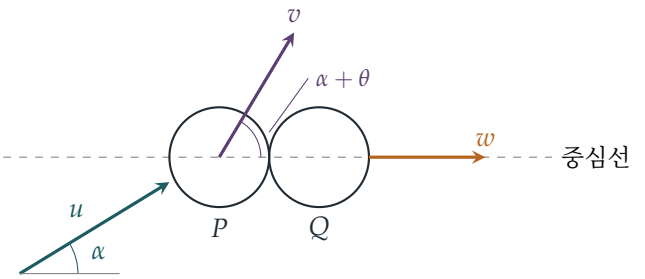
www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

핵심 아이디어

모든 속도를 중심선(line of centres) 방향 성분과 그에 수직인 성분으로 나눈다. 두 구가 매끄러우므로 충격량(impulse)은 중심선 방향으로만 작용한다. 따라서 P의 수직 성분은 변하지 않고, Q는 그 직선을 따라 움직이기 시작한다. 그러면 운동량 보존(conservation of momentum)과 뉴턴의 실험 법칙(Newton's experimental law)을 1차원 충돌에서와 똑같이 중심선 방향으로 적용할 수 있다. 나머지는 삼각함수 계산이다.

풀이

P와 Q를 매끄러운 수평 탁자 위에 놓인, 질량이 m으로 같은 매끄러운 구로 모형화한다. 충돌 순간의 중심선을 P에서 Q를 향하는 x축 방향으로 잡고, 운동 평면에서 이에 수직이며 P의 처음 속도가 있는 쪽을 y축 방향으로 잡는다.



소문항 (i)

충돌 전 P의 속도는 중심선 방향 성분이 $u\cos\alpha$, 그에 수직인 성분이 $u\sin\alpha$이다.

매끄러운 두 구 사이의 접촉력은 중심선 방향으로 작용한다. 따라서 그 직선에 수직인 방향으로는 P에 충격량이 가해지지 않고, P의 수직 성분은 변하지 않는다. 또 Q는 정지 상태에서 출발하여 중심선 방향으로만 충격량을 받으므로, 그 직선을 따라 속력 w로 움직이기 시작한다.

> **생각해 보기** P의 새 운동 방향이 중심선과 이루는 각이 왜 $\alpha-\theta$가 아니라 $\alpha+\theta$일까?

P가 받는 충격량은 중심선을 따라 뒤쪽을 향한다. 이 충격량은 P의 x성분을 $u\cos\alpha$에서 아래에서 구할 값 v_x로 줄이고, y성분은 그대로 둔다. 따라서 속도는 중심선에서 멀어지는 쪽으로 돌아가고, 중심선과 이루는 각은 α에서 $\alpha+\theta$로 커진다. $e<1$일 때 $v_x>0$임을 아래에서 확인할 것이므로 $0<\alpha+\theta<\frac{\pi}{2}$이다.

충돌 후 P의 속도는 중심선 방향 성분이 $v\cos(\alpha+\theta)$, 수직 성분이 $v\sin(\alpha+\theta)$이다. 수직 성분을 같다고 놓으면

$$u\sin\alpha = v\sin(\alpha+\theta),$$

이고, 이것이 증명할 식이다.

중심선 방향으로 운동량 보존을 적용하면(두 질량이 같으므로 m을 약분한다)

$$u\cos\alpha = v\cos(\alpha+\theta)+w. \tag{1}$$

첫 번째 결과에서 얻은 $u = v\sin(\alpha+\theta)/\sin\alpha$를 대입하면

$$\begin{aligned} w &= \frac{v\sin(\alpha+\theta)\cos\alpha}{\sin\alpha} - v\cos(\alpha+\theta) \\ &= \frac{v\big[\sin(\alpha+\theta)\cos\alpha - \cos(\alpha+\theta)\sin\alpha\big]}{\sin\alpha} = \frac{v\sin\theta}{\sin\alpha}, \end{aligned}$$

이다. 여기서 $\sin\big((\alpha+\theta)-\alpha\big)$의 전개를 이용하였다. 따라서

$$w = \frac{v\sin\theta}{\sin\alpha}.$$

이 결과는 깔끔하게 해석할 수 있다. 벡터로 운동량 보존을 쓰면 $\mathbf{u}=\mathbf{v}+\mathbf{w}$이고, 이를 $\mathbf{u}$에 수직인 방향으로 분해하면 $0 = v\sin\theta - w\sin\alpha$를 얻는다.

소문항 (ii)

중심선 방향의 뉴턴의 실험 법칙에 따르면 멀어지는 속력은 가까워지는 속력의 e배이다.

$$w - v\cos(\alpha+\theta) = e\,u\cos\alpha. \tag{2}$$

소문항 (i)에서 얻은 $w = v\sin\theta/\sin\alpha$와 $u = v\sin(\alpha+\theta)/\sin\alpha$를 대입하면

$$\frac{v\sin\theta}{\sin\alpha} - v\cos(\alpha+\theta) = \frac{e\,v\sin(\alpha+\theta)\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

양변에 $\sin\alpha/v$를 곱하고($v>0$이고 $\sin\alpha\neq 0$이므로 가능하다) 정리하면

$$\sin\theta=\cos(\theta+\alpha)\sin\alpha+e\sin(\theta+\alpha)\cos\alpha,$$

이고, 이것이 증명할 식이다.

$\tan\theta$를 구하기 위해 두 합의 각을 모두 전개한다.

$$\sin\theta=(\cos\theta\cos\alpha-\sin\theta\sin\alpha)\sin\alpha+e(\sin\theta\cos\alpha+\cos\theta\sin\alpha)\cos\alpha.$$

$\sin\theta$가 들어 있는 항을 좌변으로 모으면

$$\sin\theta\left(1+\sin^2\alpha-e\cos^2\alpha\right)=(1+e)\cos\theta\sin\alpha\cos\alpha.$$

양변을 $\cos\theta\cos^2\alpha$로 나누고 $t=\tan\alpha$로 놓은 뒤 $1/\cos^2\alpha=1+t^2$를 이용하면

$$\tan\theta\left(1+t^2+t^2-e\right)=(1+e)\,t,\qquad \text{따라서}\qquad \tan\theta=\frac{(1+e)\tan\alpha}{1-e+2\tan^2\alpha}.$$

$e<1$이므로 분모는 양수이다. 따라서 $\tan\theta>0$이고, θ는 실제로 예각만큼의 방향 변화이다.

$\tan\theta$의 최댓값

α가 예각 전체를 움직이면 $t=\tan\alpha$는 $(0,\infty)$의 모든 값을 갖는다. $t>0$이므로 분자와 분모를 t로 나눌 수 있다.

$$\tan\theta=\frac{1+e}{\dfrac{1-e}{t}+2t}.$$

생각해 보기 미분을 쓰지 않고 이 값을 최대로 만들려면 어떻게 해야 할까?

분모를 가능한 한 작게 만들면 된다. $(1-e)/t$와 $2t$가 모두 양수이므로 산술-기하 평균 부등식(AM–GM inequality)에 의해

$$\frac{1-e}{t}+2t\geq 2\sqrt{\frac{1-e}{t}\cdot 2t}=2\sqrt{2(1-e)},$$

이고, 등호는 정확히 $(1-e)/t=2t$일 때, 즉 $\tan\alpha=\sqrt{(1-e)/2}$일 때 성립한다. 이는 실제로 존재하는 예각이므로 최솟값에 도달한다. 따라서 $\tan\theta$의 최댓값은

$$\tan\theta_{\max}=\frac{1+e}{2\sqrt{2(1-e)}}.$$

(t에 대해 미분해도 같은 정상점 $2t^2=1-e$를 얻는다.)

검산

- 탄성 충돌에 가까운 극한 $e \to 1$: 두 구는 중심선 방향 성분을 서로 맞바꾸므로 P에는 $u\sin\alpha$만 남고, P는 중심선에 수직인 방향으로 움직인다. 그러면 $\alpha + \theta = \frac{\pi}{2}$이고 $\tan\theta = \cot\alpha$이다. 공식은 $\tan\theta = 2t/(2t^2) = 1/t$를 주므로 일치한다. $\alpha \to 0$일 때 $\theta \to \frac{\pi}{2}$이므로 최댓값이 한없이 커지는 것도 당연하다.
- $e = \frac{1}{2}$이면 최댓값은 $\frac{3/2}{2\sqrt{1}} = \frac{3}{4}$이고, $\tan\alpha = \frac{1}{2}$(약 $26.6°$)에서 도달한다. α를 촘촘하게 바꿔 가며 계산해 보면 0.75가 확인된다. 무작위 충돌을 많이 만들어 본 컴퓨터 시뮬레이션도 이 문제의 네 가지 결과를 모두 재현하였다.
- 작은 α(거의 정면충돌): $\tan\theta \approx \frac{1+e}{1-e}\,\alpha \to 0$이므로, 예상대로 정면충돌에서는 방향이 바뀌지 않는다.

흔한 실수

- 뉴턴의 실험 법칙을 중심선 방향 성분이 아니라 속력 전체에 적용하는 것. 반발(restitution)은 충격량의 방향으로만 작용한다.
- P의 새 각을 $\alpha - \theta$로 쓰는 것. 충격량이 중심선 방향 성분의 일부를 없애므로 P는 그 직선에서 멀어지는 쪽으로 돈다.
- $1 - e + 2\tan^2\alpha$를 양수로 만드는 것이 $e < 1$이라는 조건이라는 점, 그리고 $\tan\alpha$가 $(0, \infty)$ 전체를 움직이므로 산술-기하 평균 부등식의 등호가 실제로 성립한다는 점을 잊는 것.

STEP 너머

매끄러운 구의 비스듬한 충돌은 산란(scattering)의 가장 간단한 예이다. 이 문제에서는 같은 두 보존 법칙을 한 직선의 방향과 그에 수직인 방향으로 적용하는데, 이 아이디어는 입자 물리학과 기체 분자 운동론으로까지 확장된다. 질량이 같은 두 물체가 탄성 충돌하면, 충돌 후 두 속도가 직각을 이룬다는 유명한 결과가 나온다. 질량중심 좌표계에서는 모든 충돌이 상대 속도를 회전시키기만(그리고 이 문제에서는 줄이기도) 하는데, 이렇게 보면 이 모든 결과를 더 매끄럽게 이해할 수 있다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 이러한 관점에서 충돌을 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.