풀이

STEP III 2019, 문제 1

순수수학 • 연립 미분방정식

> **STEP III 2019, 1번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2019년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP III 시험지에 있다:
>
> www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

핵심 아이디어

$k = 1$일 때 우변은 정확히 $x + \mathrm{i}y$에 복소수 상수를 곱해서 얻는 것과 같으므로, 두 방정식은 $z = x + \mathrm{i}y$에 대한 하나의 방정식 $\dot{z} = cz$로 합쳐진다. 그러면 운동은 회전(rotation)과 지수적 감쇠(exponential decay)가 결합된 것, 곧 나선(spiral)이 된다. $k = 0$일 때는 결합이 한 쪽 방향으로만 작용한다. x는 y에 의존하지 않으므로, 먼저 x를 구한 다음 그것을 y에 대한 방정식에 대입하면 된다.

풀이

소문항 (i)

$k = 1$이면 $\dot{x} = -x - y$, $\dot{y} = x - y$이다. $z = x + \mathrm{i}y$로 놓자. 그러면

$$\begin{aligned}\dot{z} = \dot{x} + \mathrm{i}\dot{y} &= (-x - y) + \mathrm{i}(x - y) \\ &= (-1 + \mathrm{i})(x + \mathrm{i}y) = (-1 + \mathrm{i})z,\end{aligned}$$

이며, 이는 $(-1 + \mathrm{i})(x + \mathrm{i}y) = -x - \mathrm{i}y + \mathrm{i}x - y$로 전개하여 확인할 수 있다. $z(0) = 1$이므로 해는

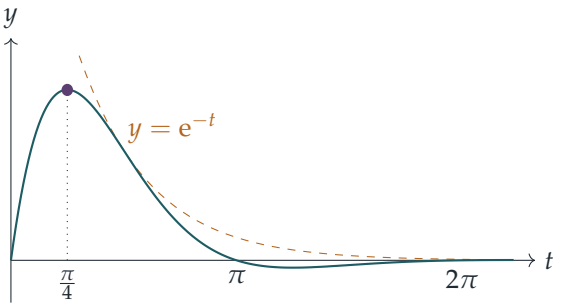
$$z = \mathrm{e}^{(-1+\mathrm{i})t} = \mathrm{e}^{-t}(\cos t + \mathrm{i}\sin t),$$

이고, 따라서

$$x = \mathrm{e}^{-t}\cos t, \qquad y = \mathrm{e}^{-t}\sin t.$$

(복소수를 쓰고 싶지 않다면, 첫 번째 방정식을 미분하고 y를 소거하여 $\ddot{x} + 2\dot{x} + 2x = 0$을 얻는다. 이 방정식의 특성방정식(auxiliary equation)의 근은 $-1 \pm \mathrm{i}$이며, 여기에 $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = -1$을 이용하면 된다.)

t에 대한 y의 그래프. 이것은 포락선(envelope) $\pm e^{-t}$ 안에 있는 사인파이므로 감쇠 진동(damped oscillation)이다. $t = n\pi$에서 0이 되고, 극점은 $\dot{y} = x - y = e^{-t}(\cos t - \sin t) = 0$인 곳, 즉 $t = \frac{\pi}{4} + n\pi$이다. 연이은 각 봉우리는 $e^{-\pi} \approx 0.04$배씩 작아지므로, 첫 번째 봉우리 이후의 진동은 실제 축척에서는 거의 보이지 않는다.



경로. 극형식(polar form)으로 쓰면 $z = e^{-t}e^{it}$의 절댓값은 $r = e^{-t}$, 편각은 $\theta = t$이다. 따라서 경로는 나선

$$r = e^{-\theta}, \qquad \theta \geq 0,$$

이며, $(1, 0)$에서 출발하여 시계 반대 방향으로 감기며 원점으로 들어가고, $t \to \infty$일 때에만 원점에 다다른다. 출발할 때 $\dot{x} = -1, \dot{y} = 1$이므로 $(1, 0)$에서 왼쪽 위로 움직이며 떠난다. 한 바퀴 돌 때마다 원점까지의 거리가 $e^{-2\pi} \approx 0.002$배로 줄어들므로, 실제 축척에서는 첫 바퀴만 보인다.

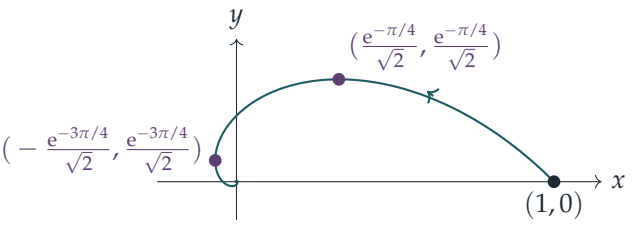
y의 최댓값. y의 극점은 $t = \frac{\pi}{4} + n\pi$이다. $t = \frac{\pi}{4}$에서 $y = e^{-\pi/4}/\sqrt{2} > 0$이다. 모든 $t \geq \frac{\pi}{2}$에 대하여 $y \leq e^{-t} \leq e^{-\pi/2}$이고, $e^{-\pi/2} < e^{-\pi/4}/\sqrt{2}$이다. 이 부등식은 $\sqrt{2} < e^{\pi/4} \approx 2.19$와 동치이기 때문이다. $[0, \frac{\pi}{2}]$에서 극점은 $t = \frac{\pi}{4}$ 하나뿐이다. 따라서 y가 최대가 되는 점은

$$\left(\frac{e^{-\pi/4}}{\sqrt{2}}, \frac{e^{-\pi/4}}{\sqrt{2}}\right) \approx (0.322,\ 0.322).$$

x의 최솟값. 이제 $\dot{x} = -x - y = -e^{-t}(\cos t + \sin t)$이고, 이것은 $\tan t = -1$일 때, 즉 $t = \frac{3\pi}{4} + n\pi$일 때 0이 된다. $x < 0$이려면 $\cos t < 0$이어야 하므로 $t = \frac{3\pi}{4} + 2n\pi$가 골라지고, 이때 $x = -e^{-t}/\sqrt{2}$이다. e^{-t}는 감소하므로, 이 값은 그러한 t 가운데 가장 작은 $t = \frac{3\pi}{4}$에서 가장 작다. ($x(0) = 1 > 0$이고 $t \to \infty$일 때 $x \to 0$이므로, 최솟값은 반드시 이 극점들 가운데 하나에서 나타난다.) 따라서 x가 최소가 되는 점은

$$\left(-\frac{e^{-3\pi/4}}{\sqrt{2}}, \frac{e^{-3\pi/4}}{\sqrt{2}}\right) \approx (-0.067,\ 0.067).$$

예상대로 두 점 모두 직선 $y = \pm x$ 위에 있다. 나선 위에서 y는 경로가 x축 방향으로 나아가는 곳에서 최대이고, x는 경로가 y축 방향으로 나아가는 곳에서 최소이다.



소문항 (ii)

$k = 0$이면 첫 번째 방정식은 그 자체로 $\dot{x} = -x$이므로, $x(0) = 1$에서

$$x = e^{-t}.$$

그러면 $\dot{y} + y = e^{-t}$이다. 적분인자(integrating factor) e^{t}를 곱하면 $\frac{d}{dt}(ye^{t}) = 1$이므로 $ye^{t} = t + c$이고, $y(0) = 0$에서 $c = 0$이다.

$$y = te^{-t}.$$

생각해 보기 이것을 어떻게 경로의 방정식으로 바꿀 수 있을까?

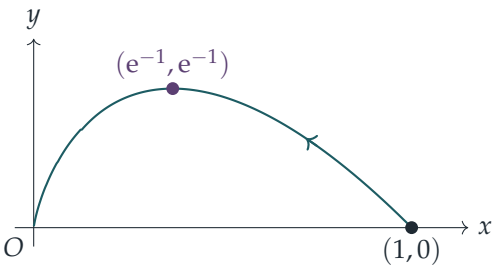
t를 소거한다. $x = e^{-t}$이므로 $t = -\ln x$이고, 따라서

$$y = -x \ln x, \qquad 0 < x \leq 1.$$

t가 0에서 ∞까지 변할 때 x는 1에서 0을 향해 감소하므로, 입자는 $(1, 0)$에서 출발하여 이 곡선을 따라 왼쪽으로 움직이고, $t \to \infty$일 때 원점에 가까워진다.

개형을 그리기 위한 특징은 다음과 같다.

- $\frac{dy}{dx} = -\ln x - 1$이고, 이것은 $x = e^{-1}$에서 0이다. 따라서 가장 높은 점은 (e^{-1}, e^{-1})이며, $t = 1$일 때 도달한다.
- $(1, 0)$에서 기울기는 -1이고, 이는 $t = 0$에서 $\dot{x} = -1, \dot{y} = 1$인 것과 맞아떨어진다.
- $x \to 0^{+}$일 때 $x \ln x \to 0$이므로 $y \to 0$이다. 그러나 기울기 $-\ln x - 1 \to +\infty$이므로, 곡선은 y축에 접하면서 원점으로 들어간다.
- $0 < x < 1$에서 $y > 0$이므로, 경로 전체가 x축 위쪽에 있다.



소문항 (i)과의 차이에 주목하자. $k = 0$일 때는 더 이상 회전이 없으므로 입자는 어느 축도 가로지르지 않는다. 그저 휘어지며 원점으로 들어갈 뿐이다.

검산

- 다시 대입해 본다. $x = \mathrm{e}^{-t}\cos t$에 대하여 $\dot{x} = -\mathrm{e}^{-t}\cos t - \mathrm{e}^{-t}\sin t = -x - y$이므로 조건을 만족한다. $\dot{y}$도 같은 방법으로 확인된다. 두 해 모두 $x(0) = 1, y(0) = 0$도 만족한다.
- 방정식을 작은 시간 간격으로 수치적으로 진행시키면 두 해가 모두 재현되며, 소문항 (i)에서 y의 최댓값은 $t \approx 0.785$에서 약 0.3224, x의 최솟값은 $t \approx 2.356$에서 약 -0.0670이고, 소문항 (ii)에서 y는 $t = 1$에서 최댓값 $1/\mathrm{e} \approx 0.3679$를 가짐이 확인된다.
- (ii)에 대한 타당성 점검: $y = t\mathrm{e}^{-t}$는 익숙한 "중근" 꼴이며, 연립방정식의 행렬이 중복 고윳값(repeated eigenvalue) -1을 가지므로 이는 자연스럽다.

흔한 실수

- x의 최솟값을 $t = -\frac{\pi}{4}$ 또는 $\frac{7\pi}{4}$에서 잡는 실수: 그곳에서도 $\dot{x} = 0$이지만 $x > 0$이다(극댓값이다). $\cos t$의 부호를 확인하자.
- 나선이 $t \to \infty$일 때에만 원점에 도달한다는 사실을 잊거나, 시계 방향으로 감기도록 그리는 실수: $\theta = t$가 증가하므로 시계 반대 방향으로 감긴다.
- (ii)에서 원점에서의 수직 접선을 놓치는 실수: $y \to 0$이지만 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x \to \infty$이다.

STEP 너머

모든 선형계(linear system) $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$는 A의 고윳값에 의해 결정된다. 여기서 $A = \begin{pmatrix} -1 & -k \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$의 고윳값은 $-1 \pm \sqrt{-k}$이다. $k = 1$일 때는 켤레복소수 쌍 $-1 \pm \mathrm{i}$이므로 **안정 나선점**(*stable spiral*)이 되고, $k = 0$일 때는 중복 고윳값 -1이 있어 **퇴화 마디점**(*degenerate node*)이 되며, $k < 0$이면 서로 다른 두 실수 고윳값을 얻는다. 이런 식으로 고정점(fixed point)을 분류하는 것(상평면 분석(phase-plane analysis))은 대학 1학년의 핵심 주제이다. Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정식)는 이 내용을 많은 그림과 함께 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.