풀이

STEP II 2019, 문제 9

역학 • 원점으로부터 포물체까지의 거리

> **STEP II 2019, 9번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2019년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP II 시험지에 있다:
>
> www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

이 문제는 *Beyond STEP*의 11.10 절 **나에게로 되돌아오는 공**에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch11/coming-back.html

핵심 아이디어

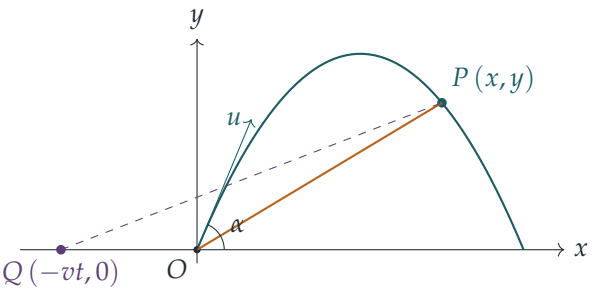
거리는 미분하기 번거롭지만 거리의 제곱은 그렇지 않다. OP가 증가하는 것은 정확히 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(OP^2) > 0$일 때이다. $x^2 + y^2$를 미분하면 t에 t에 대한 이차식(quadratic)을 곱한 꼴이 나오므로, 문제 전체는 "이 이차식이 언제 양수인가?"로 바뀌고, 이는 판별식(discriminant)이 답해 준다. 소문항 (ii)는 수평 거리에 Q의 운동을 더했을 뿐 같은 계산이다.

풀이

P와 Q를 입자로 모형화하고 공기 저항은 무시하며, O를 원점으로, x축을 수평 방향(P가 움직이는 방향)으로, y축을 연직 위 방향으로 잡는다. $s = \sin\alpha$, $c = \cos\alpha$로 두면 $0 < \alpha < \frac{1}{2}\pi$이므로 둘 다 양수이다. 시각 t에서

$$x = uct, \qquad y = ust - \tfrac{1}{2}gt^2,$$

이고, P는 다시 $y = 0$이 될 때, 즉 $T = \dfrac{2us}{g}$에 착지한다.



소문항 (i)

$r = OP$로 두면 $r^2 = x^2 + y^2$이고, $\dot{x} = uc$와 $\dot{y} = us - gt$를 이용하면

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(r^2\right) = 2(x\dot{x} + y\dot{y}) &= 2\left[u^2c^2t + \left(ust - \tfrac{1}{2}gt^2\right)(us - gt)\right] \\ &= 2t\left[u^2c^2 + u^2s^2 - \tfrac{3}{2}usgt + \tfrac{1}{2}g^2t^2\right] \\ &= t\left(g^2t^2 - 3usg\,t + 2u^2\right),\end{aligned}$$

이다. 여기서 $c^2 + s^2 = 1$을 이용하였다. 비행하는 동안 $r > 0$이므로 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r^2) = 2r\dot{r}$의 부호는 $\dot{r}$의 부호와 같고, $t > 0$이므로 그 부호는

$$f(t) = g^2t^2 - 3usg\,t + 2u^2.$$

의 부호와 같다. 이 이차식은 최고차항의 계수가 양수이고 판별식은

$$9u^2s^2g^2 - 8u^2g^2 = u^2g^2\left(9s^2 - 8\right).$$

이다.

$s < \frac{2\sqrt{2}}{3}$**인 경우,** ($s > 0$이므로) $9s^2 < 8$이 되어 판별식이 음수이고, 모든 t에 대하여 $f(t) > 0$이다. 따라서 비행하는 내내 $\dot{r} > 0$이다. 즉 OP는 증가한다.

$s > \frac{2\sqrt{2}}{3}$**인 경우,** 판별식이 양수이므로 f는 서로 다른 두 근

$$t_{1,2} = \frac{u\left(3s \mp \sqrt{9s^2 - 8}\right)}{2g},$$

을 가지며, $t_1 < t < t_2$에서 $f(t) < 0$이다. 두 근은 모두 양수이다(두 근의 합 $3us/g$와 곱 $2u^2/g^2$이 양수이기 때문이다). 이제 이 구간이 실제로 P가 공중에 있는 동안에 놓이는지 확인해야 한다.

> **생각해 보기** 이차식이 어딘가에서 음수가 되기는 하지만, 그것이 P가 착지하기 전에 일어난다는 것을 어떻게 알 수 있을까?

착지 시각에서 f의 값을 구하면

$$f(T) = g^2 \cdot \frac{4u^2s^2}{g^2} - 3usg \cdot \frac{2us}{g} + 2u^2 = 2u^2(1-s^2) = 2u^2c^2 > 0.$$

이다. 따라서 T는 두 근 사이에 있지 않다. 그런데 f의 꼭짓점은 $t = \frac{3us}{2g} < \frac{2us}{g} = T$에 있으므로 T는 꼭짓점의 오른쪽에 있고, $[t_1, t_2]$ 바깥에 있으므로 $T > t_2$를 만족해야 한다. 따라서 $0 < t_1 < t_2 < T$이고, $t_1 < t < t_2$에서 $\dot{r} < 0$이다. 즉 P가 착지하기 전 어느 시점에 OP가 감소하므로, 증명이 끝난다.

소문항 (ii)

Q는 매끄러운 지면 위를 P 쪽에서 멀어지는 방향으로 일정한 속력 v로 미끄러지므로, 시각 t에서 $(-vt, 0)$에 있다. P와 Q의 수평 거리는 $x + vt = wt$이고, 여기서

$$w = uc + v > 0,$$

이며, 연직 거리는 y이다. 따라서 $QP^2 = w^2t^2 + y^2$이고, 앞에서와 똑같이

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(QP^2\right) &= 2\left[w^2t + \left(ust - \tfrac{1}{2}gt^2\right)(us - gt)\right] \\ &= t\left(g^2t^2 - 3usg\,t + 2w^2 + 2u^2s^2\right).\end{aligned}$$

이다. 비행하는 동안 그 부호는 $h(t) = g^2t^2 - 3usg\,t + 2(w^2 + u^2s^2)$의 부호와 같고, 이 식의 판별식은

$$9u^2s^2g^2 - 8g^2\left(w^2 + u^2s^2\right) = g^2\left(u^2s^2 - 8w^2\right).$$

이다. 이 값이 음수인 것은 정확히 $8w^2 > u^2s^2$일 때, 즉 (w와 us가 모두 양수이므로) $2\sqrt{2}\,w > us$일 때이다. $w = uc + v$를 대입하면

$$2\sqrt{2}\,(uc + v) > us \iff 2\sqrt{2}\,v > \left(\sin\alpha - 2\sqrt{2}\cos\alpha\right)u.$$

이다. 따라서 주어진 조건 아래에서 모든 t에 대하여 $h(t) > 0$이고, 그러므로 $t > 0$에서 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(QP^2) > 0$이 되어 P가 비행하는 내내 QP는 증가한다. 이로써 증명이 끝난다.

소문항 (i)과 같은 논증(이번에는 $h(T) = 2w^2 > 0$)을 쓰면, 부등식이 엄격하게 반대로 성립할 때 P가 착지하기 전에 QP가 한동안 실제로 감소함을 보일 수 있다. 따라서 등호가 성립하는 경계의 경우를 제외하면, 이 조건은 사실 필요조건이기도 하다.

검산

- 소문항 (ii)에서 $v = 0$으로 두면 $2\sqrt{2}\cos\alpha > \sin\alpha$, 즉 $\tan\alpha < 2\sqrt{2}$, 즉 $\sin\alpha < \frac{2\sqrt{2}}{3}$가 되어 다시 소문항 (i)을 얻는다. 이때 Q는 O에 머물러 있으므로 당연한 결과이다.

- 임계각은 $\arcsin \frac{2\sqrt{2}}{3} \approx 70.5^\circ$로 u와 g에 무관하다. 이는 차원 분석(dimensional analysis)이 요구하는 바와 같다(쓸 수 있는 무차원량은 α뿐이다).
- $u = 10\,\mathrm{m\,s^{-1}}$, $g = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$, $\sin\alpha = 0.97$일 때 두 근은 $t_1 \approx 1.14\,\mathrm{s}$와 $t_2 \approx 1.83\,\mathrm{s}$로, 둘 다 착지 시각 $T \approx 1.98\,\mathrm{s}$보다 앞선다. 컴퓨터로 비행 과정을 단계별로 계산해 보면 이 두 시각 사이에서 OP가 줄어든다는 것과, 무작위로 고른 많은 u, α, v에 대하여 거리 QP가 증가하는 것이 정확히 소문항 (ii)의 부등식이 성립할 때임을 확인할 수 있다.

흔한 실수

- 소문항 (i)에서 "판별식이 양수이다"에서 멈추는 것. OP가 줄어드는 구간이 P가 착지한 뒤가 아니라 착지하기 전에 나타남을 보여야 한다.
- Q를 $(vt, 0)$에 두는 것. Q는 P 쪽에서 멀어지는 방향으로 움직이므로, P와의 수평 거리는 $uct + vt$이다.
- 인수 t를 빠뜨리거나, $t > 0$임을 밝히지 않고 그것으로 나누는 것.

STEP 너머

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\mathbf{r}|^2 = 2\,\mathbf{r}\cdot\dot{\mathbf{r}}$의 부호를 조사하는 것은 물체가 다가오는지 멀어지는지를 판단하는 표준적인 방법이며, 궤도 역학(orbital mechanics)과 두 물체의 상대 운동(relative motion)에서 다시 등장한다. 소문항 (ii)는 사실 Q에 대한 P의 상대 위치에 관한 문제이다. 약 70.5°보다 가파르게 던진 포물체는 비행 도중 한동안 던진 사람 쪽으로 다가온다는 깔끔한 사실은 역학 교재들이 즐겨 다루는 내용이다. 더 알고 싶다면 Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)를 참고하라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.