풀이

STEP II 2019, 문제 8

순수수학 • 곱셈적 행렬 함수

> **STEP II 2019, 8번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2019년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP II 시험지에 있다:
>
> www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

이 문제는 *Beyond STEP*의 7.3 절 **행렬식을 행렬식이게 하는 것**에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch07/determinant-axioms.html

핵심 아이디어

모든 것은 단 하나의 규칙 $\mathrm{f}(\mathbf{MN}) = \mathrm{f}(\mathbf{M})\mathrm{f}(\mathbf{N})$을 잘 고른 곱에 적용하는 데서 나온다. 매번 쓰는 요령은 같은 행렬을 두 가지 다른 방식으로 쓰거나, 어떤 행렬을 자기 자신과 다른 행렬의 곱으로 나타낸 다음 f의 값을 비교하는 것이다. 행렬식(determinant)이 바로 이런 함수 가운데 하나이므로 답이 무엇이어야 하는지 가늠하는 데 유용한 길잡이가 되지만, f가 행렬식 이라고 가정해서는 안 된다.

풀이

소문항 (i)

$\mathbf{MI} = \mathbf{M}$이므로

$$\mathrm{f}(\mathbf{M}) = \mathrm{f}(\mathbf{MI}) = \mathrm{f}(\mathbf{M})\,\mathrm{f}(\mathbf{I}).$$

문제에서 $\mathrm{f}(\mathbf{M}) \neq 0$이라고 했으므로 양변을 이것으로 나눌 수 있다. 따라서 $\mathrm{f}(\mathbf{I}) = 1$이다.

(이 가정이 없으면 이런 결론을 내릴 수 없다. 항상 0인 함수도 곱을 보존하기 때문이다.)

소문항 (ii)

곱을 전개하면 $\mathbf{J}^2 = \mathbf{I}$이므로

$$\mathrm{f}(\mathbf{J})^2 = \mathrm{f}(\mathbf{J}^2) = \mathrm{f}(\mathbf{I}) = 1.$$

따라서 $\mathrm{f}(\mathbf{J}) = \pm 1$이고, $\mathrm{f}(\mathbf{J}) \neq 1$이므로 $\mathrm{f}(\mathbf{J}) = -1$이다.

생각해 보기 $\mathbf{J}$를 곱하면 행렬은 어떻게 바뀌는가?

$\mathbf{J}$를 왼쪽에 곱하면 두 행이 바뀌고, 오른쪽에 곱하면 두 열이 바뀐다.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix}.$$

각각에 f를 적용하고 $\mathrm{f}(\mathbf{J}) = -1$을 이용하면

$$\mathrm{f}\begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix} = -\mathrm{f}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{f}\begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix} = -\mathrm{f}\begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix}.$$

첫 번째 식에서 $\mathrm{f}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = -\mathrm{f}\begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix}$를 얻고, 두 번째 식에 -1을 곱하면 이것이 $\mathrm{f}\begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix}$와도 같음을 알 수 있다. 이로써 원하는 결과가 증명된다.

소문항 (iii)

$\mathbf{A}$의 첫째 행을 $(a \;\; b)$라 하고, 둘째 행을 그것의 λ배라 하자. $\mathbf{B}$를 두 행이 같은 행렬이라 하고, $\mathbf{K}$에서 $k = \lambda$로 잡는다. $\mathbf{K}$를 왼쪽에 곱하면 둘째 행이 k배가 되므로

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ \lambda a & \lambda b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix} = \mathbf{KB}.$$

그런데 $\mathbf{B}$의 두 행을 바꾸어도 행렬은 그대로이므로, 소문항 (ii)에 의해 ($c = a, d = b$로 두면)

$$\mathrm{f}(\mathbf{B}) = -\mathrm{f}(\mathbf{B}),$$

이고, 따라서 반드시 $\mathrm{f}(\mathbf{B}) = 0$이다. 그러므로 $\mathrm{f}(\mathbf{A}) = \mathrm{f}(\mathbf{K})\,\mathrm{f}(\mathbf{B}) = 0$이다. 이 논증은 $\lambda = 0$을 포함한 모든 실수 λ에 대해 성립한다.

소문항 (iv)

먼저 세 행렬을 계산한다. $k \neq 0$일 때 $\mathbf{K}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/k \end{pmatrix}$이고,

$$\mathbf{P}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{K}^{-1}\mathbf{P}\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

다음으로, $\mathbf{K}$에 의한 켤레(conjugation)는 f의 값을 바꾸지 않는다. 실제로 $\mathrm{f}(\mathbf{K}^{-1})\mathrm{f}(\mathbf{K}) = \mathrm{f}(\mathbf{K}^{-1}\mathbf{K}) = \mathrm{f}(\mathbf{I}) = 1$이므로

$$\mathrm{f}(\mathbf{K}^{-1}\mathbf{P}\mathbf{K}) = \mathrm{f}(\mathbf{K}^{-1})\,\mathrm{f}(\mathbf{P})\,\mathrm{f}(\mathbf{K}) = \mathrm{f}(\mathbf{P}).$$

생각해 보기 k가 어떤 값일 때 $\mathbf{K}^{-1}\mathbf{PK}$가 $\mathbf{P}^2$와 $\mathbf{P}^{-1}$이 되는가?

$k = 2$로 잡으면 $\mathbf{K}^{-1}\mathbf{PK} = \mathbf{P}^2$이므로

$$\mathrm{f}(\mathbf{P}) = \mathrm{f}(\mathbf{P}^2) = \mathrm{f}(\mathbf{P})^2,$$

이고, 따라서 $\mathrm{f}(\mathbf{P}) = 0$ 또는 1이다.

$k = -1$로 잡으면 $\mathbf{K}^{-1}\mathbf{PK} = \mathbf{P}^{-1}$이므로 $\mathrm{f}(\mathbf{P}^{-1}) = \mathrm{f}(\mathbf{P})$이다. 그런데 $\mathrm{f}(\mathbf{P})\,\mathrm{f}(\mathbf{P}^{-1}) = \mathrm{f}(\mathbf{I}) = 1$이므로

$$\mathrm{f}(\mathbf{P})^2 = 1,$$

이고, 특히 $\mathrm{f}(\mathbf{P}) \neq 0$이다. 두 결과를 합치면

$$\mathrm{f}(\mathbf{P}) = 1.$$

검산

행렬식은 모든 가정을 만족한다. 곱을 보존하고, $\det \mathbf{I} = 1$이며 $\det \mathbf{J} = -1$이다. 또한 우리가 얻은 모든 결론과도 일치한다. 행이나 열을 바꾸면 부호가 바뀌고, 행이 비례하는 행렬의 행렬식은 0이며, $\det \mathbf{P} = 1$이다. 덜 뻔한 예로 $\mathrm{f}(\mathbf{M}) = \mathrm{sgn}(\det \mathbf{M})\,|\det \mathbf{M}|^{0.7}$이 있다. 수천 개의 무작위 행렬로 컴퓨터 검사를 해 보았더니, 두 함수 모두에서 곱셈 규칙, 행과 열을 바꾸는 항등식, 행이 비례할 때 $\mathrm{f}(\mathbf{A}) = 0$, 그리고 $\mathrm{f}(\mathbf{P}) = 1$이 확인되었다.

흔한 실수

- $\mathrm{f} = \det$라고 가정하는 것. 문제는 곱을 보존한다는 성질만으로 여러 성질을 이끌어 내라고 요구한다. 행렬식은 길잡이일 뿐이다.
- 근거 없이 $\mathrm{f}(\mathbf{K}^{-1}) = 1/\mathrm{f}(\mathbf{K})$를 쓰는 것. 이 식에는 소문항 (i)의 $\mathrm{f}(\mathbf{I}) = 1$과, $\mathbf{K}$가 가역(invertible)이 되도록 하는 $k \neq 0$이 필요하다.
- $\mathrm{f}(\mathbf{P})^2 = \mathrm{f}(\mathbf{P})$에서 멈추고 $\mathrm{f}(\mathbf{P}) = 0$인 경우를 배제하는 것을 잊는 것.

STEP 너머

f처럼 곱셈을 보존하는 사상은 가역인 2×2 행렬들의 군에서 0이 아닌 실수들로 가는 **준동형사상**(homomorphism)이다. 소문항 (iv)는 고전적인 논증의 출발점이다. $\mathbf{P}$와 같은 층밀림 행렬(shear matrix)은 교환자(commutator)들의 곱이므로, 이러한 준동형사상은 모두 이 행렬들을 1로 보내고, 결국 f는 행렬식에만 의존하게 된다. 또한 각 행에 대해 선형

이고, 교대적(alternating)이며, **I**에서 1인 함수는 행렬식뿐임을 보일 수도 있다. Strang의 *Introduction to Linear Algebra*는 이와 같은 성질들로부터 행렬식을 세우며, Allenby의 *Rings, Fields and Groups*는 준동형사상을 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.