풀이

STEP II 2019, 문제 7

순수수학 • 벡터와 내적

> **STEP II 2019, 7번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2019년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP II 시험지에 있다:
>
> www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

핵심 아이디어

단위벡터(unit vector)에서는 길이와 각이 모두 스칼라곱(scalar product)으로부터 나온다: $|\mathbf{u}-\mathbf{v}|^2 = 2 - 2\,\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$. 따라서 요령은 합이 영벡터라는 조건을 쪼개어 일부 벡터는 한쪽에, 나머지는 다른 쪽에 두고, 양변의 길이의 제곱을 구하는 것이다. 그러면 벡터 방정식이 스칼라곱 사이의 등식으로 바뀌고, 이 등식들이 도형의 모양을 알려 준다.

풀이

풀이 전체에서 단위벡터 $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$에 대하여 다음 사실을 이용한다.

$$|\mathbf{u}\pm\mathbf{v}|^2 = \mathbf{u}\cdot\mathbf{u} \pm 2\,\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} + \mathbf{v}\cdot\mathbf{v} = 2 \pm 2\,\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}.$$

소문항 (i)

$\mathbf{a}+\mathbf{b} = -\mathbf{c}$이므로 양변의 길이의 제곱을 구하면

$$2 + 2\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2 = |\mathbf{c}|^2 = 1,$$

이고, 따라서 요구한 대로 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = -\frac{1}{2}$이다.

조건은 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$에 대하여 대칭이므로, 같은 방법으로 ($\mathbf{b}+\mathbf{c} = -\mathbf{a}$와 $\mathbf{c}+\mathbf{a} = -\mathbf{b}$로 쓰면) $\mathbf{b}\cdot\mathbf{c} = \mathbf{c}\cdot\mathbf{a} = -\frac{1}{2}$를 얻는다. 그러므로

$$AB^2 = |\mathbf{a}-\mathbf{b}|^2 = 2 - 2\left(-\tfrac{1}{2}\right) = 3,$$

이고, 마찬가지로 $BC^2 = CA^2 = 3$이다. 세 변의 길이가 모두 $\sqrt{3}$이므로 **삼각형 ABC는 정삼각형(equilateral triangle)이다**. (위치벡터의 각 쌍은 120°의 각을 이루며, $\frac{1}{3}(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \mathbf{0}$이므로 O는 삼각형의 외심(circumcentre)이자 무게중심(centroid)이다.)

소문항 (ii)

조건을 $\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 = -(\mathbf{a}_3 + \mathbf{a}_4)$로 쓰고 양변의 길이의 제곱을 구하면

$$2 + 2\,\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2 = 2 + 2\,\mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{a}_4 \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2 = \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{a}_4.$$

벡터를 나머지 두 가지 방법으로 묶으면 같은 방식으로

$$\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_3 = \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_4, \qquad \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_4 = \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_3.$$

를 얻는다. $A_iA_j^2 = 2 - 2\,\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j$이므로, 이는 마주 보는 모서리의 길이가 같다는 뜻이다: $A_1A_2 = A_3A_4$, $A_1A_3 = A_2A_4$, $A_1A_4 = A_2A_3$.

(a) 네 점이 한 평면 위에 있는 경우

? **생각해 보기** 네 점이 놓인 평면은 반드시 원점을 지나야 하는가?

그렇다. 네 점의 무게중심은 $\frac{1}{4}(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 + \mathbf{a}_4) = \mathbf{0}$이고, 한 평면 위에 있는 점들의 무게중심은 그 평면 위에 있다. 따라서 평면은 O를 포함하며, 모든 A_i가 O로부터 거리 1에 있으므로 네 점은 그 평면에서 O를 중심으로 하는 반지름 1인 원 위에 있다. 이제부터는 이 평면에서 생각한다.

$\mathbf{w} = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2$라 하면 $\mathbf{a}_3 + \mathbf{a}_4 = -\mathbf{w}$이다.

$\mathbf{w} = \mathbf{0}$이면 $\mathbf{a}_2 = -\mathbf{a}_1$이고 $\mathbf{a}_4 = -\mathbf{a}_3$이다.

$\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$이면 $\mathbf{a}_3$와 $\mathbf{a}_3 + \mathbf{a}_4 = -\mathbf{w}$의 스칼라곱을 구하고 (ii)를 이용하면

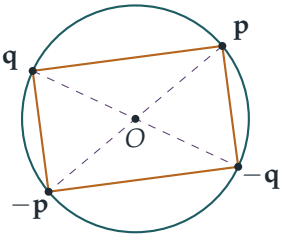
$$\mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{w} = -(1 + \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{a}_4) = -(1 + \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2) = -\tfrac{1}{2}|\mathbf{w}|^2.$$

따라서 $\mathbf{a}_3$는 $\mathbf{w}$ 방향 성분이 고정된 단위벡터이다. 즉 그 끝점은 $\mathbf{w}$에 수직인 고정된 직선 위에 있고, 직선과 원은 많아야 두 점에서 만난다. 그런데

$$(-\mathbf{a}_1) \cdot \mathbf{w} = -(1 + \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2) = -\tfrac{1}{2}|\mathbf{w}|^2,$$

이고 $-\mathbf{a}_2$에 대해서도 마찬가지이므로 $-\mathbf{a}_1$과 $-\mathbf{a}_2$는 이러한 벡터 두 개이며, $A_1 \neq A_2$이므로 서로 다르다. 그러므로 $\mathbf{a}_3 = -\mathbf{a}_1$ 또는 $\mathbf{a}_3 = -\mathbf{a}_2$이고, 그러면 $\mathbf{a}_4 = -\mathbf{w} - \mathbf{a}_3$는 나머지 하나가 된다.

어느 경우든 네 위치벡터는 $\mathbf{q} \neq \pm\mathbf{p}$인 어떤 단위벡터들에 대하여 $\mathbf{p}, -\mathbf{p}, \mathbf{q}, -\mathbf{q}$이다. 따라서 네 점은 원의 두 지름(diameter)의 양 끝점이다. 이 점들이 이루는 사각형은 대각선이 (O에서) 서로를 이등분하므로 평행사변형(parallelogram)이고, 대각선의 길이가 (둘 다 2로) 같으므로 **직사각형(rectangle)**이다. 두 지름이 수직일 때, 그리고 그때에만 정사각형이 된다.



(엄밀히 말하면 꼭짓점은 원을 따라 차례대로 잡아야 한다. 만약 이름이 $A_1 = \mathbf{p}$, $A_2 = \mathbf{q}$, $A_3 = -\mathbf{q}$, $A_4 = -\mathbf{p}$ 순서로 붙어 있다면, 그 순서대로 이으면 이 직사각형의 두 변과 두 대각선을 그리게 된다.)

(b) 정사면체 이제 여섯 모서리 A_iA_j의 길이가 모두 같으므로, 여섯 개의 스칼라곱 $\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j$ $(i \neq j)$는 모두 같은 값을 가진다. 이 값을 k라 하자. $\mathbf{a}_1$과 합이 영벡터인 식의 스칼라곱을 구하면

$$0 = \mathbf{a}_1 \cdot (\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 + \mathbf{a}_4) = 1 + 3k,$$

이므로 $k = -\frac{1}{3}$이다. 그러면 각 모서리에 대하여

$$A_1A_2^2 = 2 - 2k = 2 + \tfrac{2}{3} = \tfrac{8}{3}, \qquad \text{이므로 한 변의 길이는} \qquad \sqrt{\tfrac{8}{3}} = \frac{2\sqrt{6}}{3}.$$

이다.

검산

- 꼭짓점이 $\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$, $\frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,-1)$, $\frac{1}{\sqrt{3}}(-1,1,-1)$, $\frac{1}{\sqrt{3}}(-1,-1,1)$인 사면체는 정사면체(regular tetrahedron)이고, 위치벡터가 단위벡터이며 그 합이 $\mathbf{0}$이고, 모서리의 길이는 $\frac{1}{\sqrt{3}}|(0,2,2)| = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{6}}{3} \approx 1.633$이다.
- (i)과 비교해 보자. 120°를 이루는 세 단위벡터는 변의 길이 $\sqrt{3} \approx 1.732$를 주어 약간 더 길다. 정사면체의 꼭짓점들이 구면 위에 "더 빽빽하게" 모여 있으므로 이는 타당하다.
- 합이 영벡터인 네 단위벡터의 무작위 집합 수천 개에 대해 컴퓨터로 확인한 결과, (ii)의 세 스칼라곱 등식이 모두 성립하였고, 평면인 경우에는 점들이 항상 $\pm\mathbf{p}$, $\pm\mathbf{q}$처럼 마주 보는 쌍으로 나타났다.

흔한 실수

- (i)에서 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = -\frac{1}{2}$에서 멈추는 것: 삼각형이 정삼각형이라고 결론짓기 전에 세 스칼라곱(또는 세 변의 길이)을 모두 구해야 한다.

- (a)에서 꼭짓점이 어떻게 배열되어 있는지 확인하지 않고 마주 보는 변이 같다는 것만으로 "평행사변형"이라고 결론짓거나, 평면이 O를 지난다는 것을 보이는 것을 잊는 것.

STEP 너머

합이 영벡터이고 모든 쌍의 스칼라곱이 같은 단위벡터들의 집합은 **정단체**(*regular simplex*)의 꼭짓점이다. n차원에서는 이러한 벡터가 $n+1$개 있고 $\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j = -\frac{1}{n}$이며, 이것이 위의 $-\frac{1}{2}$와 $-\frac{1}{3}$을 준다. 이러한 배치는 화학(메테인의 결합각 109.5°는 $\cos^{-1}(-\frac{1}{3})$이다)과 부호 이론(coding theory)에도 나타난다. 모든 스칼라곱 $\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j$로 이루어진 행렬을 **그람 행렬**(*Gram matrix*)이라 하는데, 이 행렬은 벡터들의 배치를 회전의 차이를 제외하고 결정하며, 이것이 이 문제 전체의 바탕에 깔린 아이디어이다. 더 읽어 보려면 Strang의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수학 입문)가 좋은 출발점이다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.