풀이

STEP II 2019, 문제 6

순수수학 • 일계 미분방정식

> **STEP II 2019, 6번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2019년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP II 시험지에 있다:
>
> www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

핵심 아이디어

두 방정식 모두에서 우변은 x와 y의 한 가지 조합에만 의존한다. 소문항 (i)에서는 $y+x$이고, 소문항 (ii)에서는 $y-x$이다. 소문항 (ii)의 이차식은 사실 $(y-x)^2+4(y-x)+3$이기 때문이다. 이 관찰 하나로 직선 해를 찾고, 정류점(stationary point)이 놓이는 직선을 정하며, (소문항 (i)에서는) 방정식을 변수분리(separation of variables)할 수 있는 꼴로 바꿀 수 있다. 나머지는 해곡선(solution curve)이 서로 교차하지 않는다는 문제의 설명이 해결해 준다. 두 직선 해 사이에서 출발한 곡선은 영원히 그 사이에 갇혀 있다.

풀이

소문항 (i)

직선 해. $y=mx+c$이면 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=m$이므로 다음이 성립해야 한다.

$$m=mx+c+x+1=(m+1)x+(c+1) \quad \text{모든} x.$$

x의 계수를 비교하면 $m=-1$이고, 상수항을 비교하면 $c+1=m=-1$이므로 $c=-2$이다. 따라서 해는 $y=-x-2$이다.

정류점의 위치. $y=y_3(x)$의 정류점에서는 $0=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y+x+1$이므로, 그 점은 직선 $y=-x-1$ 위에 있다.

이제 $k<-2$라 하자. 곡선 $y=y_3(x)$와 직선 $y=-x-2$는 둘 다 해이고, $x=0$에서 곡선은 직선보다 아래에 있다($k<-2$). 두 해는 결코 만나지 않으므로 곡선은 모든 x에 대하여 직선 아래에 머문다. 즉 $y_3(x)<-x-2<-x-1$이다. 따라서 모든 곳에서 $y_3(x)+x+1<-1<0$이다. 기울기는 결코 0이 되지 않으므로(사실 항상 -1보다 작다)

정류점이 없다.

모든 정류점은 극소점이다. 방정식을 미분하면

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 1.$$

정류점에서 도함수는 0이므로 이계도함수(second derivative)는 $1 > 0$이고, 따라서 그 점은 극소점(local minimum)이다.

풀기. $Y = y + x$로 두면 $\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 1 = Y + 2$이다. 직선 $Y = -2$ 위에서는 이것이 이미 구한 해이고, 그렇지 않으면 변수를 분리한다.

$$\int \frac{\mathrm{d}Y}{Y+2} = \int \mathrm{d}x \quad \Longrightarrow \quad \ln|Y+2| = x + \text{상수} \quad \Longrightarrow \quad Y + 2 = Ae^x,$$

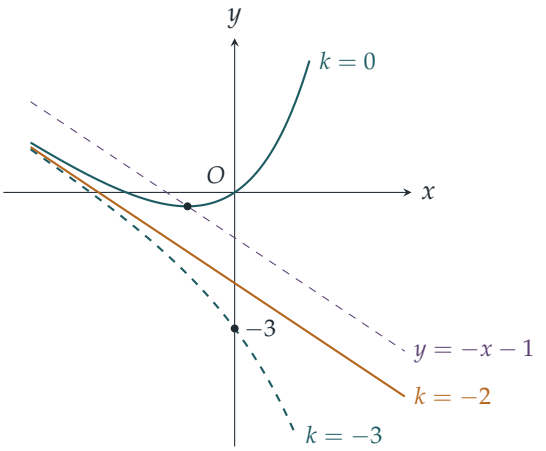
여기서 A는 상수이다($A = 0$이면 직선이 된다). 따라서 $y = Ae^x - x - 2$이고, $y(0) = k$에서 $A = k + 2$이다.

$$y_3(x) = (k+2)e^x - x - 2.$$

이는 앞에서 알아낸 사실과 일치한다. $y_3'(x) = (k+2)e^x - 1$은 $k \le -2$일 때 결코 0이 되지 않고, $k > -2$일 때는 $e^x = 1/(k+2)$인 곳에서 단 한 번 0이 된다.

세 곡선.

- $k = 0$: $y = 2e^x - x - 2$이며 원점을 지난다. 극소점은 $e^x = \frac{1}{2}$인 곳, 즉 $(-\ln 2,\ \ln 2 - 1) \approx (-0.69, -0.31)$이며, 직선 $y = -x - 1$ 위에 있다. $x \to -\infty$일 때 $2e^x \to 0$이므로 곡선은 위쪽에서 $y = -x - 2$에 가까워지고, $x \to \infty$일 때는 지수함수가 지배한다.
- $k = -2$: 직선 $y = -x - 2$ 자체이다.
- $k = -3$: $y = -e^x - x - 2$이며 $(0, -3)$을 지나고, 항상 감소한다. $x \to -\infty$일 때 아래쪽에서 $y = -x - 2$에 가까워지고, $x \to \infty$일 때 $-e^x$처럼 급격히 떨어진다.



소문항 (ii)

우변 다시 쓰기. 항을 묶으면

$$x^2+y^2-2xy-4x+4y+3=(y-x)^2+4(y-x)+3=(y-x+1)(y-x+3).$$

$u=y-x$로 두어 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=(u+1)(u+3)$으로 쓰면 편리하다.

직선 해. $y=mx+c$이면 $u=(m-1)x+c$이고, 다음이 성립해야 한다.

$$m=\big((m-1)x+c+1\big)\big((m-1)x+c+3\big)\quad \text{모든} x.$$

$m\neq 1$이면 우변은 x에 대한 진짜 이차식이 되어 상수와 같을 수 없으므로 $m=1$이다. 그러면 $1=(c+1)(c+3)$, 즉 $c^2+4c+2=0$이고, $c=-2\pm\sqrt{2}$를 얻는다. 두 해는 다음과 같다.

$$y=x-2+\sqrt{2}\qquad \text{그리고}\qquad y=x-2-\sqrt{2}.$$

y_4의 정류점. 기울기는 정확히 $u=-1$ 또는 $u=-3$일 때 0이므로, 모든 정류점은 다음 직선 위에 있다.

$$y=x-1\qquad \text{또는}\qquad y=x-3.$$

두 직선 사이에서는 $-3<y-x<-1$이므로 $u+1<0<u+3$이고, 기울기 $(u+1)(u+3)$은 **음수**이다. (그 바깥에서는 양수이다.)

곡선이 사는 곳. $x=0$에서 $u=-2$이고, 이는 $-2-\sqrt{2}\approx -3.41$과 $-2+\sqrt{2}\approx -0.59$ 사이에 있다. 따라서 $x=0$에서 곡선은 두 직선 해 사이에 있고, 해곡선은 서로 교차하지 않으므로

$$x-2-\sqrt{2}<y_4(x)<x-2+\sqrt{2}\quad \text{모든} x.$$

정류점이 놓이는 두 직선 사이의 띠$(-3<u<-1)$는 이 띠 안에 들어 있다.

> ? **생각해 보기** 곡선은 두 평행선 사이에 갇혀 있다. 그런데 띠 안에서 곡선은 어디로 갈까?

$u=y_4-x$를 추적하자. u는 다음을 만족한다.

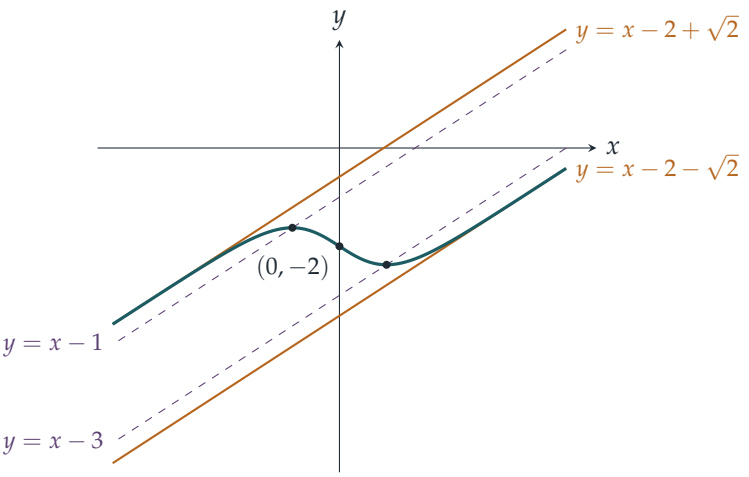
$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=(u+1)(u+3)-1=u^2+4u+2=\big(u+2-\sqrt{2}\big)\big(u+2+\sqrt{2}\big),$$

이는 $-2-\sqrt{2}<u<-2+\sqrt{2}$인 동안, 즉 항상 음수이다. 따라서 u는 순감소하고 유계이므로 $x\to\pm\infty$일 때 극한을 가진다. 그 극한에서 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$는 0으로 수렴해야 하므로(그렇지 않으면 u가 한없이 변할 것이다) 극한값은 근이다. 즉 $x\to-\infty$일 때 $u\to-2+\sqrt{2}$이고, $x\to+\infty$일 때 $u\to-2-\sqrt{2}$이다.

따라서 왼쪽에서 오른쪽으로 읽으면 다음과 같다.

- 멀리 왼쪽에서 곡선은 아래쪽에서 $y = x - 2 + \sqrt{2}$에 바짝 붙어 있고, 기울기는 1에 가깝다.
- u가 -1을 지나 떨어질 때 곡선은 $y = x - 1$과 한 점에서 만나며, 이 점은 **극대점**(local maximum)이다 (기울기가 양에서 음으로 바뀐다).
- 곡선은 기울기 $(-1)(1) = -1$로 $(0, -2)$를 지나 내려간다.
- u가 -3을 지나 떨어질 때 곡선은 $y = x - 3$과 한 점에서 만나며, 이 점은 **극소점**이다.
- 그 뒤 곡선은 다시 올라가며, 위쪽에서 $y = x - 2 - \sqrt{2}$에 바짝 붙고 기울기는 1로 수렴한다.

u는 순감소하므로 $u = -1$과 $u = -3$을 각각 정확히 한 번씩 지나고, 따라서 정류점은 정확히 두 개이다. 멋진 성질이 하나 더 있다. (x, y)를 $(-x, -4 - y)$로 바꾸어도 방정식과 출발점 $(0, -2)$는 변하지 않으므로, 곡선은 $(0, -2)$에 대하여 점대칭(half-turn symmetry)이고, 극대점과 극소점은 그 점에 대하여 서로 대칭인 상이다.



검산

- 소문항 (i)에서 다시 대입해 보자. $y = (k+2)e^x - x - 2$이면 $y' = (k+2)e^x - 1$이고 $y + x + 1 = (k+2)e^x - 1$이다. $k = -2$로 두면 직선이 다시 나온다.
- $k = 0$일 때 극소점 $(-\ln 2, \ln 2 - 1) \approx (-0.693, -0.307)$은 실제로 $y = -x - 1$ 위에 있다.
- 소문항 (ii)에서 $(0, -2)$로부터 출발한 단계별 수치해(컴퓨터로 확인함)는 두 직선 사이에 머물고, $y = x - 1$ 위의 $(-0.623, -1.623)$ 근처에서 극대, $y = x - 3$ 위의 $(0.623, -2.377)$ 근처에서 극소에 이르며, $x = \pm 6$에서는 점근선(asymptote)과의 차이

가 약 10^{-7} 이내가 된다. 대칭성이 예측하듯이 이 두 점은 $(0, -2)$에 대하여 서로 대칭이다.

흔한 실수

- 교차하지 않는다는 성질을 쓰는 것을 잊는 실수. "$k < -2$이면 정류점이 없다"를 보이려면 곡선이 $x = 0$에서만이 아니라 **모든** x에 대하여 $y = -x - 2$ 아래에 머문다는 사실이 필요하다.
- y_4를 직선 해 중 하나와 교차하도록 그리거나, 극대점과 극소점을 거꾸로 그리는 실수. 점선 사이에서 $(u+1)(u+3)$의 부호를 보면 어느 쪽이 어느 것인지 결정된다.
- 소문항 (ii)에서 m과 c를 구할 때, $m = 1$인 경우를 먼저 배제하거나 포함하지 않은 채 $m - 1$로 나누는 실수.

STEP 너머

문제 첫머리의 설명은 피카르(Picard)-린델뢰프 정리(Picard–Lindelöf theorem)의 유일성(uniqueness) 부분이다. 우변이 매끄러우면 각 점을 지나는 해는 정확히 하나뿐이므로 해곡선은 교차할 수 없다. 소문항 (ii)는 사실 **자율**(autonomous) 방정식 $u' = u^2 + 4u + 2$가 변장한 것이며, 공식 없이 평형점(equilibrium)과 그 사이에서의 u'의 부호로부터 곡선이 어디로 가는지 알아낸 방법은 미분방정식의 정성적 이론(qualitative theory)의 출발점이다. Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정식)는 유일성과 이러한 위상선(phase line) 그림을 모두 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.