풀이

STEP II 2019, 문제 5

순수수학 • 반복의 고정점

> **STEP II 2019, 5번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2019년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP II 시험지에 있다:
>
> www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

핵심 아이디어

상수 수열은 **고정점**(fixed point), 즉 $f(x) = x$의 해에서 시작한다. 주기(period)가 2인 수열은 $f(f(x)) = x$의 해 가운데 고정점이 아닌 것에서 시작한다. 모든 고정점은 $f(f(x)) = x$도 만족하므로, $f(x) - x$는 사차식(quartic) $f(f(x)) - x$의 인수(factor)여야 한다. 나머지 인수인 이차식(quadratic)을 구하고 나면, 모든 것이 판별식(discriminant)의 문제로 귀결된다.

풀이

두 소문항에 공통인 인수분해

두 소문항 모두에서 상수 c에 대하여 $f(x) = x^2 - px + c$이다((i)에서는 $c = p$, (ii)에서는 $c = q$). 임의의 x와 y에 대하여

$$f(y) - f(x) = (y^2 - x^2) - p(y - x) = (y - x)(y + x - p).$$

$y = f(x)$를 대입하고 양변에 $f(x) - x$를 더하면

$$\begin{aligned} f(f(x)) - x &= [f(f(x)) - f(x)] + [f(x) - x] \\ &= (f(x) - x)(f(x) + x - p + 1). \end{aligned}$$

앞으로 사용할 두 가지 결과는 다음과 같다.

- 수열의 주기가 2인 것은 a가 $Q(x) = f(x) + x - p + 1$의 근이면서 $f(x) - x$의 근이 아닌 경우와 정확히 같다. 실제로 $f(f(a)) = a$이면 $u_2 = u_0$이고, 각 항은 바로 앞의 항에 의해 결정되므로 수학적 귀납법(induction)에 의해 모든 n에 대하여 $u_{n+2} = u_n$이다. 이때 수열이 상수가 아닌 것은 정확히 $u_1 \neq u_0$, 즉 $f(a) \neq a$인 경우이다.

- x가 고정점이면 $Q(x) = 2x - p + 1$이다. 따라서 고정점이 동시에 Q의 근이 되는 것은 $x = \frac{1}{2}(p-1)$인 경우뿐이다.

소문항 (i)

여기서는 $\mathrm{f}(x) = x^2 - px + p$이므로

$$\mathrm{f}(a) - a = a^2 - (p+1)a + p = (a-1)(a-p).$$

수열이 상수인 것은 정확히 $u_1 = u_0$인 경우이므로(이때 모든 항이 a와 같다), 구하는 값은

$$a = 1 \quad \text{그리고} \quad a = p.$$

주기 2의 경우, 나머지 인수는

$$Q(x) = x^2 - px + p + x - p + 1 = x^2 + (1-p)x + 1,$$

이고, 그 판별식은

$$(1-p)^2 - 4 = (p-1-2)(p-1+2) = (p-3)(p+1).$$

- $-1 < p < 3$이면 판별식이 음수이므로 Q는 실근을 갖지 않고, 주기 2를 주는 실수 a는 없다.
- $p = 3$ 또는 $p = -1$이면 Q는 오직 하나의 근 $x = \frac{1}{2}(p-1)$을 가지며, 이는 각각 1 또는 -1이다. $p = 3$일 때 고정점은 1과 3이고, $p = -1$일 때 고정점은 1과 -1이다. 두 경우 모두 Q의 근이 고정점이므로, 거기서 시작하는 수열은 주기 2가 아니라 상수 수열이다.
- $p > 3$ 또는 $p < -1$이면 Q는 서로 다른 두 실근을 갖는다. 어느 쪽도 고정점이 아니다. 위의 두 번째 항목에 따르면 고정점이려면 $\frac{1}{2}(p-1)$이어야 하는데,

  $$Q\left(\tfrac{1}{2}(p-1)\right) = \tfrac{1}{4}(p-1)^2 - \tfrac{1}{2}(p-1)^2 + 1 = 1 - \tfrac{1}{4}(p-1)^2 \neq 0$$

  이다. $(p-1)^2 > 4$이기 때문이다. 따라서 a를 두 근 중 어느 것으로 잡든 주기 2인 수열을 얻는다.

그러므로 주기 2를 주는 a의 값이 존재할 필요충분조건은 $p > 3$ 또는 $p < -1$이다.

소문항 (ii)

이제 $\mathrm{f}(x) = x^2 - px + q$이므로

$$\mathrm{f}(x) - x = x^2 - (p+1)x + q.$$

상수 수열이 되려면 $\mathrm{f}(a) = a$인 a, 즉 이 이차식의 실근이 필요하다.

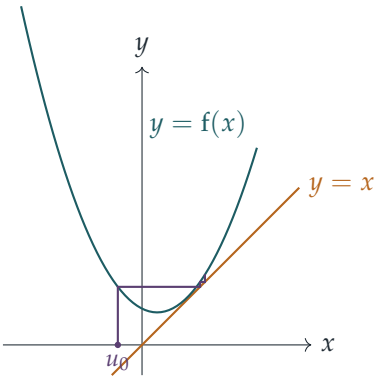
모든 x에 대하여 $f(x) > x$이면, 모든 a에 대하여 $f(a) \neq a$이므로 어떤 수열도 상수가 아니다.

역으로, 어떤 a도 상수 수열을 주지 않는다고 하자. 그러면 $g(x) = x^2 - (p+1)x + q$는 실근을 갖지 않는다. 이때 g는 연속(continuous)이고 결코 영이 되지 않으므로 부호가 바뀌지 않으며, $x \to \infty$일 때 $g(x) \to +\infty$이므로 모든 곳에서 양수이다. (동치인 표현으로, 판별식이 음수이고 최고차항 계수(leading coefficient)가 양수이다.) 즉 모든 x에 대하여 $f(x) > x$이고, 이로써 "필요충분조건"의 증명이 완성된다.

추론. 상수 수열이 없다고 하자. 그러면 모든 x에 대하여 $f(x) > x$이므로, 임의의 a에 대하여

$$u_{n+1} = f(u_n) > u_n \quad \text{모든} n.$$

이 수열은 순증가(strictly increasing)하므로 $u_2 > u_1 > u_0$이다. 특히 $u_2 \neq u_0$이므로, 수열의 주기는 2일 수 없다.



그림이 이 상황을 보여 준다. 포물선이 $y = x$보다 완전히 위에 있으므로, 반복값들이 그리는 "계단"은 위로 올라갈 수밖에 없다.

마지막 부분. 역(converse)은 거짓이다. $p = q = 0$으로 잡으면 $f(x) = x^2$이다. 이 수열은 $a = 0$과 $a = 1$에서 상수이다. 주기 2가 되려면 $f(f(a)) = a^4 = a$, 즉 $a(a-1)(a^2+a+1) = 0$이어야 한다. 인수 $a^2 + a + 1$의 판별식은 음수이므로, 실수해는 $a = 0$과 $a = 1$뿐이고 둘 다 고정점이다. 따라서 어떤 값은 상수 수열을 주지만, 주기 2를 주는 a의 값은 존재하지 않는다.

? 생각해 보기 $f(x) = x^2$은 그저 운 좋은 우연일까?

그렇지 않다. 일반적으로 고정점에 대한 이차식의 판별식은 $D = (p+1)^2 - 4q$이고, $Q(x) = x^2 + (1-p)x + q - p + 1$의 판별식은

$$(1-p)^2 - 4(q-p+1) = (p+1)^2 - 4q - 4 = D - 4.$$

(i)에서와 마찬가지로, Q의 근이 고정점이 되는 것은 Q의 판별식이 영일 때뿐이다. 따라서 상수 수열은 $D \geq 0$일 때 존재하고, 주기 2인 수열은 $D > 4$일 때 존재한다. $0 \leq D \leq 4$인 임의의 p, q가 반례(counterexample)가 된다.

검산

- (i)에서 $p = 4$이면 $Q(x) = x^2 - 3x + 1$의 근은 $\frac{1}{2}(3 \pm \sqrt{5}) \approx 2.618,\ 0.382$이다. 2.618에서 시작하면 $\mathrm{f}(2.618) = 4 + (2.618 - 4)(2.618) \approx 0.382$이고 $\mathrm{f}(0.382) \approx 2.618$이다. 예측대로 주기 2이다.
- $p = 3$에서 Q의 근은 $x = 1$이고 $\mathrm{f}(1) = 3 + (1 - 3) = 1$이다. 고정점이므로, 경계값이 제외된다는 것이 확인된다.
- $(x^2 - (p+1)x + p)(x^2 + (1-p)x + 1)$을 전개하면 $\mathrm{f}(\mathrm{f}(x)) - x$가 된다. 수천 개의 임의의 (p, x)에서 컴퓨터로 확인하고, (ii)의 조건 "$D > 4$일 때 그리고 그때에만 주기 2"도 함께 확인했으나 예외는 발견되지 않았다.

흔한 실수

- $p = 3$과 $p = -1$을 포함하는 것. 이때 $\mathrm{f}(\mathrm{f}(a)) = a$는 중근(repeated root)을 갖지만, 그 근은 고정점이므로 수열은 상수이다.
- 주기 2인 점을 찾기 전에 $\mathrm{f}(\mathrm{f}(x)) - x$에서 인수 $\mathrm{f}(x) - x$를 제거해야 한다는 것을 잊는 것.
- 마지막 부분에서 부등식의 방향만으로 논증하는 것. "...는 참인가?"라는 질문을 결론짓는 것은 구체적인 반례 하나이다.

STEP 너머

이것은 **이산 동역학계**(discrete dynamical systems)로 들어가는 첫걸음이다. 모든 이차 사상은 일차 변수 변환에 의해 로지스틱 사상(logistic map) $x \mapsto rx(1-x)$와 동등하다. 매개변수가 커짐에 따라 고정점은 2-주기 궤도에 자리를 내주고, 이어서 4-주기 궤도가 나타나는 식으로 계속되어, 혼돈(chaos)으로 끝나는 주기 배가(period-doubling) 연쇄가 일어난다. 여러분이 찾은 임계값, 즉 Q의 판별식이 영이 되는 곳은 이러한 분기(bifurcation) 가운데 첫 번째이다. Strogatz의 *Nonlinear Dynamics and Chaos*(비선형 동역학과 혼돈)는 매우 읽기 쉬운 입문서이다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.