풀이

STEP II 2019, 문제 4

순수수학 • 삼각함수의 망원곱

> **STEP II 2019, 4번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2019년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP II 시험지에 있다:
>
> www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

핵심 아이디어

각이 매번 두 배가 되는(또는 절반이 되는) 코사인들의 곱은 가장 작은 각의 사인을 곱하면 연쇄적으로 소거(telescoping)된다. 그러면 배각 공식(double-angle formula) $2\sin\theta\cos\theta = \sin 2\theta$가 인수들을 하나씩 차례로 흡수한다. 곱을 닫힌 형태(closed form)로 나타내고 나면, 로그(logarithm)를 취해 곱을 합으로 바꾸고, 미분하여 $\ln\cos$를 $\tan$로 바꿀 수 있다. 탄젠트의 합은 바로 여기서 나온다. 무한 버전은 두 가지 표준적인 극한(limit)을 이용하여 $n \to \infty$로 보내면 얻어진다.

풀이

소문항 (i)

곱을 P라 하자. $\sin\frac{\pi}{9} \neq 0$이므로 이것을 곱한 뒤 항등식을 세 번 적용할 수 있다.

$$\begin{aligned} 8\sin\tfrac{\pi}{9}\,P &= 4(2\sin\tfrac{\pi}{9}\cos\tfrac{\pi}{9})\cos\tfrac{2\pi}{9}\cos\tfrac{4\pi}{9} = 2(2\sin\tfrac{2\pi}{9}\cos\tfrac{2\pi}{9})\cos\tfrac{4\pi}{9} \\ &= 2\sin\tfrac{4\pi}{9}\cos\tfrac{4\pi}{9} = \sin\tfrac{8\pi}{9} = \sin(\pi - \tfrac{\pi}{9}) = \sin\tfrac{\pi}{9}. \end{aligned}$$

양변을 $8\sin\frac{\pi}{9}$로 나누면

$$\cos\tfrac{\pi}{9}\cos\tfrac{2\pi}{9}\cos\tfrac{4\pi}{9} = \frac{1}{8}.$$

소문항 (ii)

여기서는 각 $x, \frac{x}{2}, \ldots, \frac{x}{2^n}$이 절반씩 줄어들므로 가장 작은 각은 $x/2^n$이다. $0 < x/2^n < \frac{1}{2}\pi$이므로 그 사인은 0이 아니다. $\sin(x/2^n)$을 곱하면 인수 $\cos(x/2^n)$이 이것과 짝을 이루어 $\frac{1}{2}\sin(x/2^{n-1})$이 되고, 이것은 다시 $\cos(x/2^{n-1})$과 짝을 이루며, 이런 식으로 $\cos x$까지 올

라간다. $n+1$번의 단계마다 인수 $\frac{1}{2}$이 하나씩 생긴다.

$$\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)\prod_{k=0}^{n}\cos\left(\frac{x}{2^k}\right)=\frac{1}{2^{n+1}}\sin 2x, \qquad \text{이므로} \qquad \prod_{k=0}^{n}\cos\left(\frac{x}{2^k}\right)=\frac{\sin 2x}{2^{n+1}\sin(x/2^n)}.$$

생각해 보기 미분을 이용하여 코사인들의 곱을 어떻게 탄젠트들의 합으로 바꿀 수 있을까?

로그를 취한다. 각 k에 대하여 $0<x/2^k<\frac{1}{2}\pi$이므로 모든 인수는 양수이고, $\sin 2x>0$이기도 하다. 따라서

$$\sum_{k=0}^{n}\ln\cos\left(\frac{x}{2^k}\right)=\ln\sin 2x-(n+1)\ln 2-\ln\sin\left(\frac{x}{2^n}\right).$$

연쇄 법칙(chain rule)에 의해 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln\cos(x/2^k)=-\frac{1}{2^k}\tan(x/2^k)$임을 이용하여 x에 대하여 미분하면

$$-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k}\tan\left(\frac{x}{2^k}\right)=2\cot 2x-\frac{1}{2^n}\cot\left(\frac{x}{2^n}\right).$$

양변에 -1을 곱하면 정확히 구하는 결과를 얻는다.

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k}\tan\left(\frac{x}{2^k}\right)=\frac{1}{2^n}\cot\left(\frac{x}{2^n}\right)-2\cot 2x.$$

소문항 (iii)

곱의 공식을 $\cos x\neq 0$으로 나누고 $\sin 2x=2\sin x\cos x$를 이용하면

$$\prod_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{x}{2^k}\right)=\frac{2\sin x\cos x}{2^{n+1}\sin(x/2^n)\cos x}=\frac{\sin x}{2^n\sin(x/2^n)}.$$

생각해 보기 $n\to\infty$일 때 $2^n\sin(x/2^n)$은 어떻게 되는가?

$\theta=x/2^n$으로 놓으면 $n\to\infty$일 때 $\theta\to 0$이다. 그러면

$$2^n\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)=x\cdot\frac{\sin\theta}{\theta}\longrightarrow x\cdot 1=x,$$

이고, 따라서

$$\prod_{k=1}^{\infty}\cos\left(\frac{x}{2^k}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin x}{2^n\sin(x/2^n)}=\frac{\sin x}{x}.$$

급수(series)에 대해서는 $j=k+2$로 치환한다. 그러면 $\frac{1}{2^{j-2}}=\frac{1}{2^k}$이고 $\frac{\pi}{2^j}=\frac{\pi/4}{2^k}$이므로, 이 합은 $(0,\frac{1}{2}\pi)$에 속하는 $x=\frac{\pi}{4}$를 소문항 (ii)의 급수에 대입한 것이다. 이 x에 대하여 $2\cot 2x=2\cot\frac{\pi}{2}=0$이므로, $k=n$까지의 부분합(partial sum)은

$$\frac{1}{2^n}\cot\left(\frac{\pi}{4\cdot 2^n}\right)=\frac{1}{x}\cdot\frac{\theta}{\tan\theta}\qquad\left(\theta=\frac{x}{2^n},\ x=\frac{\pi}{4}\right).$$

$n \to \infty$일 때 $\theta \to 0$이고 $\theta / \tan\theta \to 1$이므로, 부분합은 $1/x$로 수렴(converge)한다.

$$\sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{2^{j-2}} \tan\left(\frac{\pi}{2^j}\right) = \frac{4}{\pi}.$$

검산

- 소문항 (i): $\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ \approx 0.9397 \times 0.7660 \times 0.1736 \approx 0.1250$.
- 소문항 (ii)에서 $n = 0$인 경우: 곱은 $\cos x$이고 공식은 $\sin 2x/(2\sin x) = \cos x$를 준다. $n = 0$일 때 합의 항등식은 $\tan x = \cot x - 2\cot 2x$가 되는데, 이는 cot에 대한 배각 공식을 정리한 것이다.
- 소문항 (iii): 급수의 처음 몇 항은 $\tan\frac{\pi}{4} = 1$, $\frac{1}{2}\tan\frac{\pi}{8} \approx 0.2071$, $\frac{1}{4}\tan\frac{\pi}{16} \approx 0.0497$, ...이고, 컴퓨터로 확인한 합은 $1.27324\ldots = 4/\pi$이다.
- $\prod \cos(x/2^k) = \sin x / x$에서 $x \to 0$으로 보내면 당연히 그래야 하듯 $1 = 1$을 얻는다.

흔한 실수

- $\frac{1}{2}$ 인수의 개수를 잘못 세는 것: $k = 0$부터 n까지의 곱에는 $n+1$개의 인수가 있으므로 분모는 2^n이 아니라 2^{n+1}이다.
- 모든 인수가 양수임을 확인하지 않고 로그를 취하는 것. 범위 $0 < x < \frac{1}{2}\pi$가 중요한 이유가 바로 이것이다.
- $x = \frac{\pi}{4}$에서 $2\cot 2x$가 0이 된다는 것을 잊거나, $x = \frac{\pi}{2}$를 사용하는 것($j = 1$인 항은 정의되지 않는 $\tan\frac{\pi}{2}$가 된다).

STEP 너머

$\prod \cos(x/2^k) = \sin x / x$에 $x = \frac{\pi}{2}$를 대입하고 각 코사인을 중첩된 제곱근으로 나타내면 비에트(Viète)의 공식 $\frac{2}{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \cdots$을 얻는데, 이는 수학의 역사에서 최초의 무한곱(infinite product)이다. 유한한 곱에서 했던 것처럼 무한곱의 로그를 항별로 미분하려면 정당화가 필요하다. 해석학(analysis) 입문 과정에서 언제 그것이 허용되는지를 다룬다. 오일러(Euler)의 곱 $\sin x = x\prod_{n\geq 1}\left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$도 같은 아이디어에서 비롯된다. 엄밀한 배경 지식을 원한다면 Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 이해)를 읽어 보라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.