풀이

STEP II 2019, 문제 3

순수수학 • 다항식 근의 한계

> **STEP II 2019, 3번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2019년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP II 시험지에 있다:
>
> www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

핵심 아이디어

삼각부등식(triangle inequality)을 쓰면 다항식(polynomial)의 각 항을 그 크기로 바꾸어 다항식을 위에서 누를 수 있고, $|x| < 1$일 때 그 크기들은 기하급수(geometric series)를 이룬다. 이로부터 작은 근(root)의 하한을 얻는다. 큰 근에 대해서는 $1/\omega$를 보는 것이 요령이다. f의 계수(coefficient)를 거꾸로 배열하면 모양이 정확히 같은 다항식이 되므로, 작은 근에 대한 결과가 한 번 더 일을 해 준다. 소문항 (ii)에서는 이 범위 덕분에 정수근 후보가 네 개로 줄어든다.

풀이

삼각부등식

양변이 모두 음이 아니므로 제곱끼리 비교하면 충분하다. $x_1x_2 \leq |x_1x_2| = |x_1||x_2|$이므로

$$|x_1 + x_2|^2 = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 \leq |x_1|^2 + 2|x_1||x_2| + |x_2|^2 = (|x_1| + |x_2|)^2,$$

이고, 음이 아닌 제곱근을 취하면 $|x_1 + x_2| \leq |x_1| + |x_2|$를 얻는다.

n개의 수에 대해서는 n에 대한 수학적 귀납법(induction)을 쓴다. $n = 1$인 경우는 등식이고 $n = 2$인 경우는 방금 보였다. 결과가 $n-1$개의 수에 대해 성립한다고 하면, $x_1 + \cdots + x_{n-1}$과 x_n에 두 수의 경우를 적용하여

$$\begin{aligned} |x_1 + \cdots + x_{n-1} + x_n| &\leq |x_1 + \cdots + x_{n-1}| + |x_n| \\ &\leq |x_1| + \cdots + |x_{n-1}| + |x_n|, \end{aligned}$$

를 얻으며, 이것이 n개의 수에 대한 결과이다.

소문항 (i)(a)

$f(x) - 1 = a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} + x^n$이다. 삼각부등식을 쓰고, 이어서 $|a_i| \le A$를, 마지막 항에는 $1 \le A$를 쓰면

$$\begin{aligned} |f(x) - 1| &\le |a_1||x| + \cdots + |a_{n-1}||x|^{n-1} + |x|^n \\ &\le A(|x| + |x|^2 + \cdots + |x|^n). \end{aligned}$$

이다. $0 \le |x| < 1$이므로 유한 기하급수의 합은 모든 항이 음이 아닌 무한급수의 합보다 크지 않다.

$$|x| + |x|^2 + \cdots + |x|^n \le \sum_{k=1}^{\infty} |x|^k = \frac{|x|}{1 - |x|}.$$

따라서 요구한 대로 $|f(x) - 1| \le \dfrac{A|x|}{1 - |x|}$이다.

소문항 (i)(b)

$f(\omega) = 0$이므로 $|f(\omega) - 1| = 1$이고, 소문항 (a)에 의해

$$1 \le \frac{A|\omega|}{1 - |\omega|}.$$

이다. $1 - |\omega| > 0$이므로 부등호 방향을 바꾸지 않고 양변에 곱할 수 있다. 즉 $1 - |\omega| \le A|\omega|$, 곧 $1 \le (1 + A)|\omega|$이므로

$$|\omega| \ge \frac{1}{1 + A}.$$

이다. 상한은 바로 나온다. $|\omega| < 1 \le 1 + A$. 따라서 $(*)$가 성립한다.

소문항 (i)(c)

이제 $|\omega| \ge 1$이다. 하한은 쉽다. $A \ge 1 > 0$이므로 $|\omega| \ge 1 > \frac{1}{1+A}$이다. 실제 핵심은 상한이다.

$|\omega| = 1$이면 곧바로 $|\omega| \le 1 + A$이므로, $|\omega| > 1$이라 하자. $g(y) = y^n f(1/y)$로 두면

$$g(y) = 1 + a_{n-1} y + a_{n-2} y^2 + \cdots + a_1 y^{n-1} + y^n.$$

이다.

생각해 보기 왜 g에 소문항 (a)와 (b)의 결과를 쓸 수 있는가?

이 다항식은 f와 꼴이 정확히 같다. 상수항이 1, 최고차항의 계수가 1이고, 나머지 계수는 $a_{n-1}, \ldots, a_1$을 거꾸로 배열한 것이므로 각각의 크기가 여전히 A 이하이다. 따라서 같은 A로 소문항 (b)를 g에 적용할 수 있다.

$\omega \neq 0$이므로 $g(1/\omega) = \omega^{-n} f(\omega) = 0$이고, 따라서 $1/\omega$는 $|1/\omega| < 1$인 g의 실근이다. g에 대한 소문항 (b)에 의해

$$\frac{1}{|\omega|} \geq \frac{1}{1+A}, \qquad \text{따라서} \qquad |\omega| \leq 1 + A.$$

이다. 그러므로 크기에 관계없이 f의 모든 실근에 대해 $(*)$가 성립한다. ($f(0) = 1$이므로 0은 결코 근이 아님에 유의한다.)

소문항 (ii)

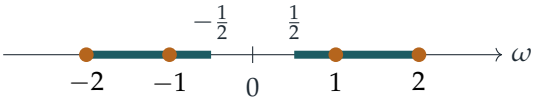
135로 나누고 항을 오름차순으로 쓰면, 방정식은 $f(x) = 0$이며 여기서

$$f(x) = 1 - \tfrac{126}{135}x - \tfrac{91}{135}x^2 - \tfrac{100}{135}x^3 - x^4 + x^5.$$

이다. 이는 $n = 5$인 소문항 (i)의 꼴이다. 상수항과 최고차항의 계수가 모두 1이고, 나머지 계수의 크기는 $\frac{126}{135}, \frac{91}{135}, \frac{100}{135}, 1$로 모두 $A = 1$ 이하이다. 따라서 모든 실근은

$$\tfrac{1}{2} \leq |\omega| \leq 2.$$

를 만족한다.



허용된 영역(색칠한 부분)에 있는 정수는 ± 1과 ± 2뿐이다. 원래의 5차식(quintic) $p(x) = 135x^5 - 135x^4 - 100x^3 - 91x^2 - 126x + 135$에 대입하면

$$\begin{aligned} p(1) &= 135 - 135 - 100 - 91 - 126 + 135 = -182, \\ p(-1) &= -135 - 135 + 100 - 91 + 126 + 135 = 0, \\ p(2) &= 4320 - 2160 - 800 - 364 - 252 + 135 = 879, \\ p(-2) &= -4320 - 2160 + 800 - 364 + 252 + 135 = -5657. \end{aligned}$$

이다. 따라서 정수근은 $x = -1$뿐이다. 실제로

$$p(x) = (x+1)(135x^4 - 270x^3 + 170x^2 - 261x + 135),$$

이고, 4차 인수는 $x = -1$에서 971이므로 -1은 단순근(simple root)이다.

검산

- $(x+1)(135x^4 - 270x^3 + 170x^2 - 261x + 135)$를 전개하여 원래의 5차식이 나오는지 확인한다.

- 이 5차식에는 실근이 두 개 더 있으며 대략 0.595와 1.725이다. 소문항 (i)이 예측하듯 둘 다 $[\frac{1}{2}, 2]$에 들어 있다.
- $A = 2$인 $f(x) = 1 - 2x + x^2 = (1-x)^2$을 시험해 보면 근 1이 $[\frac{1}{3}, 3]$에 들어 있다. 이 범위는 수백 개의 무작위 다항식에 대해 컴퓨터로도 확인하였다.

흔한 실수

- 소문항 (a)에서 x^n 항을 빠뜨리는 것. 이 항의 계수는 어떤 a_n이 아니라 1이며, $A \geq 1$이기 때문에 이 항도 기하급수에 합류할 수 있다.
- 소문항 (c)에서 $|\omega| \geq 1$인데도 ω에서 소문항 (a)를 그대로 다시 쓰려는 것. 이때는 기하급수가 더 이상 수렴하지 않는다. 대신 $1/\omega$로 넘어가야 한다.
- 소문항 (ii)에서 135의 약수를 모두 근의 후보로 시험하는 것. 틀린 방법은 아니지만, 소문항 (i)의 범위를 쓰면 시험할 후보가 네 개만 남는다.

STEP 너머

다항식의 근을 계수로 제한하는 것은 고전적인 주제이다. 이 결과는 코시(Cauchy)의 근의 상한의 한 형태이며, 절댓값 대신 복소수의 절댓값(modulus)을 쓰면 똑같은 논증이 복소근에 대해서도 글자 그대로 성립한다. 뒤집기 $y^n f(1/y)$는 작은 근과 큰 근을 맞바꾸어 주며, 대수학과 복소해석학에서 흔히 쓰는 도구이다. 이와 같은 범위와 복소근의 기하에 관한 더 많은 내용은 Needham, *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)를 읽어 보라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.