풀이

STEP II 2019, 문제 2

순수수학 • 역함수의 적분

> **STEP II 2019, 2번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2019년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP II 시험지에 있다:
>
> www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

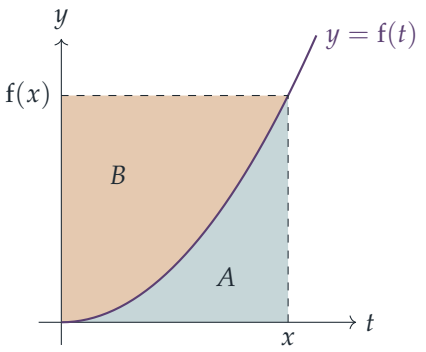
핵심 아이디어

$y = \mathrm{f}(t)$의 그래프는 꼭짓점이 $(0,0)$과 $(x, \mathrm{f}(x))$인 직사각형을 두 조각으로 나눈다. 한 조각은 곡선 아래의 넓이이고, 다른 조각은 곡선과 y축 사이의 넓이로, 이는 역함수(inverse function)의 적분(integral)이다. 따라서 두 적분의 합은 직사각형의 넓이와 같다. 소문항 (i)과 (ii)는 함수를 음함수(implicit function) 꼴로만 정의하므로 직접 적분할 수는 없지만, 그 **역함수**는 간단한 삼차식(cubic)이다. 이 항등식(identity)을 이용하면 어려운 적분을 쉬운 적분으로 바꿀 수 있다.

풀이

처음 결과

$t > 0$에서 $\mathrm{f}'(t) > 0$이고 $\mathrm{f}(0) = 0$이므로 f는 $[0, x]$에서 순증가(strictly increasing)한다. 따라서 $t > 0$이면 $\mathrm{f}(t) > 0$이고, f는 $[0, \mathrm{f}(x)]$에서 $[0, x]$로 가는 역함수 f^{-1}를 가진다. 같은 곡선을 $y = \mathrm{f}(t)$로도, $t = \mathrm{f}^{-1}(y)$로도 나타낼 수 있다.



$0 \le t \le x$에서 곡선과 t축 사이의 영역 A의 넓이는

$$A = \int_0^x \mathrm{f}(t)\,\mathrm{d}t.$$

이다. $0 \le y \le \mathrm{f}(x)$에서 곡선과 y축 사이의 영역 B는 가로 띠들로 이루어져 있다. 높이 y에서의 띠는 $t = 0$부터 $t = \mathrm{f}^{-1}(y)$까지 뻗어 있으므로

$$B = \int_0^{\mathrm{f}(x)} \mathrm{f}^{-1}(y)\,\mathrm{d}y.$$

이다. 곡선이 증가하면서 $(0,0)$에서 $(x,\mathrm{f}(x))$까지 이어지므로, A와 B는 겹치지 않고 정확히 맞물려 직사각형 $0 \le t \le x, 0 \le y \le \mathrm{f}(x)$를 채운다. 이 직사각형의 넓이는 $x\,\mathrm{f}(x)$이므로

$$\int_0^x \mathrm{f}(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^{\mathrm{f}(x)} \mathrm{f}^{-1}(y)\,\mathrm{d}y = x\,\mathrm{f}(x),$$

가 되어 증명이 끝난다.

소문항 (i)

$\phi(y) = y^3 + y$라 하자. 그러면 $\phi'(y) = 3y^2 + 1 > 0$이므로 ϕ는 순증가하고, $y \to \pm\infty$일 때 $\phi(y) \to \pm\infty$이다. 따라서 각 실수 t에 대하여 $\phi(y) = t$를 만족하는 실수 y가 꼭 하나 존재하며, 이것이 $\mathrm{g}(t)$이다. 다시 말해 $\mathrm{g} = \phi^{-1}$이다.

$\mathrm{g}(0) = 0$. $t = 0$을 대입하면 $\mathrm{g}(0)(\mathrm{g}(0)^2 + 1) = 0$이다. 실수 $\mathrm{g}(0)$에 대하여 $\mathrm{g}(0)^2 + 1 \ge 1$이므로 $\mathrm{g}(0) = 0$이다.

$\mathrm{g}'(t) > 0$. $\mathrm{g}(t)^3 + \mathrm{g}(t) = t$를 t에 대하여 음함수 미분(implicit differentiation)하면

$$(3\,\mathrm{g}(t)^2 + 1)\,\mathrm{g}'(t) = 1 \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{g}'(t) = \frac{1}{3\,\mathrm{g}(t)^2 + 1} > 0,$$

이다. 분모가 1 이상이기 때문이다.

생각해 보기 $\mathrm{g}(t)$를 식으로 적을 수 없는데, 어떻게 적분할 수 있을까?

그럴 필요가 없다. g는 처음 결과의 조건을 만족하고, 그 역함수는 적분하기 쉬운 $\phi(y) = y^3 + y$이다. $x = 2$로 결과를 적용하려면 $g(2)$, 즉 $y^3 + y = 2$의 실근이 필요하다. 이 근은 $y = 1$이며, ϕ가 순증가하므로 유일한 근이다. 따라서

$$\int_0^2 g(t)\,dt = 2g(2) - \int_0^1 (y^3 + y)\,dy = 2 - \left(\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{2}\right) = \frac{5}{4}.$$

소문항 (ii)

두 정의를 비교하면 $h(t)$는 $y^3 + y = t + 2$의 실근이므로 $h(t) = g(t+2)$이다. $u = t + 2$로 치환하면

$$\int_0^8 h(t)\,dt = \int_2^{10} g(u)\,du = \int_0^{10} g(u)\,du - \int_0^2 g(u)\,du.$$

첫 번째 적분에는 $x = 10$으로 처음 결과를 이용한다. $2^3 + 2 = 10$이므로 $g(10) = 2$이고, 따라서

$$\int_0^{10} g(u)\,du = 10 \times 2 - \int_0^2 (y^3 + y)\,dy = 20 - (4 + 2) = 14.$$

두 번째 적분에 소문항 (i)의 결과를 쓰면

$$\int_0^8 h(t)\,dt = 14 - \frac{5}{4} = \frac{51}{4}.$$

다른 방법. 그림을 h에 직접 적용할 수도 있다. 이번에는 0이 아니라 $h(0) = 1$이다. 곡선은 $(0,1)$에서 $(8,2)$까지 이어지고, $h^{-1}(y) = y^3 + y - 2$이다. 곡선 아래의 넓이는 8×2 직사각형에서 0×1 직사각형(여기서는 비어 있다)을 빼고, 다시 $1 \le y \le 2$에서 곡선 왼쪽의 넓이를 뺀 것이다.

$$16 - \int_1^2 (y^3 + y - 2)\,dy = 16 - \left(\tfrac{15}{4} + \tfrac{3}{2} - 2\right) = 16 - \tfrac{13}{4} = \tfrac{51}{4}.$$

검산

- $[0,2]$에서 $0 \le g(t) \le 1$이므로 (i)의 적분값은 0과 2 사이에 있어야 한다. 또한 g는 이 구간에서 오목(concave)하므로(증가하는 볼록(convex) 함수의 역함수이기 때문이다), 적분값은 삼각형의 넓이 $\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 = 1$ 이상이다. 답 $\frac{5}{4}$는 이에 들어맞는다.
- (ii)에서는 $[0,8]$에서 $1 \le h(t) \le 2$이므로 적분값은 8과 16 사이에 있으며, 12.75도 그렇다.
- 여러 점에서 삼차방정식을 수치적으로 풀고 심프슨 공식(Simpson's rule)으로 적분하면 1.25000과 12.75000을 얻으며, 이는 정확한 답과 일치한다.

흔한 실수

- 역함수 적분의 위끝을 잘못 쓰는 것: 위끝은 2가 아니라 $g(2) = 1$이다.
- $h(0) = 0$인 것처럼 h에 처음 결과를 적용하는 것. $h(0) = 1$이므로 그림에 띠가 하나 더 생기고, 항등식을 조정해야 한다(또는 $h(t) = g(t+2)$를 이용한다).
- g가 잘 정의됨, 즉 $y^3 + y = t$가 실근을 꼭 하나 가짐을 보이는 것을 잊는 것.

STEP 너머

처음 항등식은 **영의 부등식**(*Young's inequality*)에서 등호가 성립하는 경우이다. $f(0) = 0$인 증가함수 f와 임의의 $a, b \geq 0$에 대하여 $ab \leq \int_0^a f + \int_0^b f^{-1}$가 성립한다. $f(t) = t^{p-1}$로 두면 $ab \leq a^p/p + b^q/q$를 얻는데, 이는 해석학(analysis)에서 휠더(Hölder) 부등식의 출발점이다. g가 미분가능하고 $g' = 1/\phi'(g)$라는 사실은 **역함수 정리**(*inverse function theorem*)이다. Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 입문서)가 이를 꼼꼼히 증명한다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.