풀이

STEP II 2019, 문제 11

확률과 통계 • 삼각형의 개수 세기

> **STEP II 2019, 11번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2019년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP II 시험지에 있다:
>
> www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

핵심 아이디어

세 길이가 넓이가 0이 아닌 삼각형을 이루는 것은 짧은 두 길이의 합이 가장 긴 길이보다 클 때이며, 그때뿐이다. 따라서 모든 문제는 고정된 최댓값보다 작은 수의 쌍을 세는 것으로 귀결되고, 가장 깔끔하게 세는 방법은 가운데 수 n_2를 고정한 다음 n_1으로 가능한 값이 몇 개인지 묻는 것이다. 소문항 (i)에서 이 세기를 하고, 소문항 (ii)와 (iii)에서는 같은 정도로 일어날 법한(equally likely) 선택의 수로 알맞게 나누기만 하면 된다.

풀이

소문항 (i)

$m = n_3$이라 하자. $k \leq m-1$인 k에 대해 $n_2 = k$로 고정한다. 그러면 n_1은

$$m - k < n_1 < k,$$

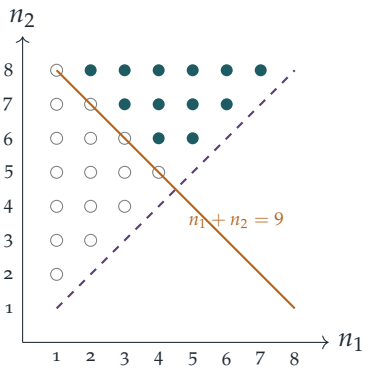
를 만족해야 하므로 n_1은 $m-k+1, \ldots, k-1$의 값을 가지며, 이 수가 양수일 때 선택의 가짓수는 $2k-m-1$이다. ($m-k \geq 1$이므로 조건 $n_1 > 0$은 저절로 성립한다.)

$m = 9$일 때 가짓수는 $2k-10$이고, $k = 6, 7, 8$일 때 양수이다:

$$2 + 4 + 6 = 12.$$

$m = 10$일 때 가짓수는 $2k-11$이고, $k = 6, 7, 8, 9$일 때 양수이다:

$$1 + 3 + 5 + 7 = 16.$$



그림은 $n_3 = 9$인 경우를 나타낸다. 색칠된 점들은 직선 $n_1 + n_2 = 9$의 위쪽이면서 대각선 $n_1 = n_2$의 위쪽에 있고, 모두 $2 + 4 + 6 = 12$개이며, 삼각형 모양 영역에서 각 n_2마다 한 줄씩 차지한다.

홀수인 경우, $n_3 = 2n + 1$**.** $n_2 = k$일 때의 가짓수는 $2k - 2n - 2 = 2(k - n - 1)$이고, $k = n + 2, \ldots, 2n$일 때 양수이다. 1부터 $n - 1$까지 변하는 $j = k - n - 1$을 놓으면

$$\sum_{j=1}^{n-1} 2j = (n-1)n = n(n-1).$$

짝수인 경우, $n_3 = 2n$**.** $n_2 = k$일 때의 가짓수는 $2k - 2n - 1$이고, $k = n + 1, \ldots, 2n - 1$일 때 양수이다. 1부터 $n - 1$까지 변하는 $j = k - n$을 놓으면

$$\sum_{j=1}^{n-1} (2j-1) = (n-1)^2,$$

이고, 이는 처음 $n - 1$개의 홀수의 합이다. 두 공식 모두 $12 = 4 \cdot 3$, $16 = 4^2$과 일치한다.

소문항 (ii)

길이가 N인 막대가 세 막대 중 가장 길므로, 세 막대가 넓이가 0이 아닌 삼각형을 이룰 필요충분조건은 선택된 두 길이 $a < b$가 $a + b > N$을 만족하는 것이다. ($a + N > b$와 같은 나머지 두 삼각부등식(triangle inequality)은 $N > b$이므로 저절로 성립한다.) 따라서 유리한 선택은 정확히 $n_3 = N$일 때 소문항 (i)에서 센 쌍들이다.

두 막대는 남은 $N - 1$개 중에서 선택하므로, 같은 정도로 일어날 법한 선택은 $\binom{N-1}{2}$가지이다.

$N = 2n + 1$일 때: 선택은 $\binom{2n}{2} = n(2n-1)$가지이므로

$$\mathrm{P}(\text{삼각형}) = \frac{n(n-1)}{n(2n-1)} = \frac{n-1}{2n-1},$$

이 되어 요구된 결과를 얻는다.

$N = 2n$일 때: 선택은 $\binom{2n-1}{2} = (2n-1)(n-1)$가지이다. 이것이 0이 아니려면 $n \geq 2$이어야 한다($N = 2$이면 다른 막대가 하나뿐이어서 두 개를 고를 수 없다). 그러면

$$\mathrm{P}(\text{삼각형}) = \frac{(n-1)^2}{(2n-1)(n-1)} = \frac{n-1}{2n-1}.$$

꽤 놀랍게도, N이 하나 더 작은데도 답은 홀수인 경우와 같은 공식이다.

소문항 (iii)

서로 다른 세 막대에는 가장 긴 막대가 있으며, 그 길이를 m이라 하면 $3 \leq m \leq 2M+1$이다. 이 선택이 삼각형을 이루는 것은 나머지 두 길이가 $n_3 = m$일 때 소문항 (i)에서 센 쌍 중 하나를 이룰 때이며, 그때뿐이다. 유리한 선택은 각각 가장 긴 막대를 기준으로 한 번씩만 세어지므로, 유리한 선택의 수는

$$T = \sum_{m=2}^{2M+1} c(m),$$

이다. 여기서 $c(m)$은 소문항 (i)에서 구한 가짓수이다. ($c(2) = 0$이므로 $m = 2$를 포함해도 아무 상관이 없다.)

> **생각해 보기** $c(m)$이 m이 홀수일 때와 짝수일 때 공식이 다르다면, 어떻게 더할 수 있을까?

둘씩 짝을 짓는다. 각 $n = 1, \ldots, M$에 대해 짝수 값 $m = 2n$과 홀수 값 $m = 2n+1$을 함께 묶으면, 이들은 $m = 2, 3, \ldots, 2M+1$을 정확히 한 번씩 덮는다. 이 둘을 합한 기여는

$$(n-1)^2 + n(n-1) = (n-1)(2n-1) = 2n^2 - 3n + 1.$$

이다. 주어진 $\sum k^2$의 공식과 $\sum k = \frac{1}{2}M(M+1)$을 이용하면

$$\begin{aligned} T &= \sum_{n=1}^{M} \left(2n^2 - 3n + 1\right) \\ &= \tfrac{1}{3}M(M+1)(2M+1) - \tfrac{3}{2}M(M+1) + M \\ &= \tfrac{1}{6}M\left[2(2M^2+3M+1) - 9(M+1) + 6\right] \\ &= \tfrac{1}{6}M\left(4M^2 - 3M - 1\right) \\ &= \tfrac{1}{6}M(4M+1)(M-1). \end{aligned}$$

세 막대를 고르는, 같은 정도로 일어날 법한 선택의 총수는

$$\binom{2M+1}{3} = \frac{(2M+1)(2M)(2M-1)}{6}.$$

이다. 나누고 $M/6$을 약분하면

$$\mathrm{P}(\text{삼각형}) = \frac{M(4M+1)(M-1)}{2M(2M+1)(2M-1)} = \frac{(4M+1)(M-1)}{2(2M+1)(2M-1)},$$

이 되어 요구된 결과를 얻는다.

검산

- $M = 1$: 막대는 $1, 2, 3$이고 $1 + 2 = 3$이므로 퇴화 삼각형(degenerate triangle)이 되어 확률은 0이어야 하며, 공식도 0을 준다.
- $M = 2$: 막대는 1부터 5까지이다. 삼각형은 $\{2, 3, 4\}$, $\{2, 4, 5\}$, $\{3, 4, 5\}$이므로 확률은 $3/10$이고, 공식은 $\frac{9 \cdot 1}{2 \cdot 5 \cdot 3} = \frac{3}{10}$을 준다.
- $M \to \infty$일 때 확률은 $\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$로 수렴한다. 이는 연속 버전과 일치한다. $[0, 1]$에서 균등분포(uniform distribution)를 따르는 서로 독립인 세 길이에 대해, 작은 두 길이의 합이 가장 긴 길이보다 클 확률은 $\frac{1}{2}$이다.
- 소문항 (i)의 모든 가짓수와 소문항 (ii), (iii)의 확률은 n이 39까지, M이 19까지인 경우에 대해 모든 쌍 또는 세 쌍을 직접 나열하는 컴퓨터 검사로 확인했다(예를 들어 $M = 3$이면 $13/35$이다).

흔한 실수

- $n_1 + n_2 = n_3$을 허용하는 것: 길이가 $2, 3, 5$인 세 막대는 일직선으로 놓여 넓이가 0이므로, 부등식은 등호 없이 성립해야 한다.
- 소문항 (ii)에서 $\binom{N-1}{2}$ 대신 $\binom{N}{2}$를 쓰는 것: 길이가 N인 막대는 이미 뽑혀 있다.
- 소문항 (iii)에서 m의 홀수 값만(또는 짝수 값만) 더하는 것: 가장 긴 막대의 길이는 3부터 $2M + 1$까지 어떤 값이든 될 수 있다.

STEP 너머

가장 큰 원소를 기준으로 경우를 나누어 센 다음 더하는 것은 조합론(combinatorics)의 표준적인 기법이며, 같은 아이디어로 최댓값에 대해 적분하면 연속 버전의 답 $\frac{1}{2}$를 얻는다. 그림에서처럼 어떤 영역 안의 격자점(lattice point)을 세어 그 영역의 넓이와 비교하는 것은 이산 확률과 연속 확률을 잇는 다리이다. Blitzstein과 Hwang의 *Introduction to Probability*(확률론 입문)에는 고전적인 "부러진 막대" 삼각형 문제를 비롯하여 이런 종류의 문제가 많이 실려 있다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.