풀이

STEP II 2019, 문제 10

역학 • 강체의 평형

> **STEP II 2019, 10번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2019년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP II 시험지에 있다:
>
> www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

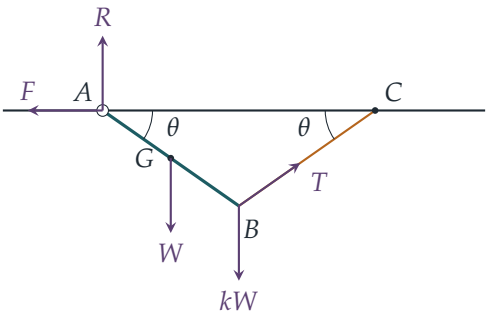
핵심 아이디어

$AB = BC = 2a$이고 A, C가 모두 레일 위에 있으므로 삼각형 ABC는 이등변삼각형(isosceles triangle)이다. 따라서 줄도 레일과 각 θ를 이룬다. 이 기하적 사실을 확보하면 문제는 전형적인 강체(rigid body)의 평형(equilibrium) 문제가 된다. A에 대한 모멘트(moment)를 취하면 고리에 작용하는 미지의 힘들을 거치지 않고 장력(tension)을 구할 수 있고, 이어서 힘을 분해하면 수직항력(normal reaction)과 마찰력(friction)을 얻는다. 마지막 소문항에서는 k에 대한 두 문턱값을 비교한다. k가 커질 때 어느 쪽에 먼저 도달하는가?

풀이

모형과 힘. 막대는 균일한(uniform) 강체이므로 무게 W는 중점 G에 작용하고, $AG = a$이다. 고리는 가벼우므로(light) 레일이 고리에 가하는 힘은 그대로 A에서 막대에 전달된다. 즉 연직 위 방향의 수직항력 R와 레일 방향의 마찰력 F이다. 줄은 가볍고 늘어나지 않으며(inextensible), 장력 T가 B에서 BC 방향으로 작용한다. 추가 하중 kW는 B에서 연직 아래 방향으로 작용한다.

삼각형 ABC에서 변 AB와 BC는 모두 $2a$이므로 A와 C에서의 밑각이 같다. 즉 줄은 레일과 각 θ를 이룬다. 수평 방향으로 B는 A에서 $2a\cos\theta$만큼, C는 A에서 $4a\cos\theta$만큼 떨어져 있다.



F는 레일을 따라 C에서 멀어지는 방향으로 작용한다고 하자. 줄이 막대를 C 쪽으로 당기므로 실제로 그래야 함을 곧 확인할 것이다.

소문항 (i)

A에 대한 모멘트를 취하면 R와 F가 사라진다. 무게와 하중의 모멘트 팔 길이는 각각 $a\cos\theta$와 $2a\cos\theta$이다. 장력은 B에서 수평 성분 $T\cos\theta$(C 쪽)와 연직 위 방향 성분 $T\sin\theta$로 나눈다. 연직 성분의 팔 길이는 $2a\cos\theta$이고 수평 성분의 팔 길이는 $2a\sin\theta$(레일 아래로 B까지의 깊이)이며, 두 성분 모두 막대를 같은 방향, 즉 그림에서 반시계 방향으로 돌린다. 따라서

$$T\sin\theta\cdot 2a\cos\theta + T\cos\theta\cdot 2a\sin\theta = W\cdot a\cos\theta + kW\cdot 2a\cos\theta,$$
$$4aT\sin\theta\cos\theta = aW(1+2k)\cos\theta.$$

$0<\theta<90^\circ$에서 $\cos\theta\neq 0$이므로 $a\cos\theta$로 나눌 수 있다.

$$T=\frac{(2k+1)W}{4\sin\theta}.$$

이 식은 고리가 미끄러지지만 않는다면 언제나 성립한다. 줄은 $T>W$일 때, 즉 ($4\sin\theta>0$을 곱하여) $(2k+1)W>4W\sin\theta$일 때 끊어지며, 이는

$$2k+1>4\sin\theta,$$

와 같다. 이것이 보이려던 결과이다.

소문항 (ii)

막대 전체에 대해 힘을 분해한다. 연직 방향으로

$$R+T\sin\theta = W+kW \quad\Longrightarrow\quad R=(1+k)W-\frac{(2k+1)W}{4}=\frac{(2k+3)W}{4}.$$

수평 방향으로 작용하는 힘은 F와 장력의 수평 성분뿐이므로

$$F=T\cos\theta=\frac{(2k+1)W\cos\theta}{4\sin\theta}.$$

이 값은 양수이므로 마찰력이 C에서 멀어지는 방향으로 작용함이 확인된다. 또 $R > 0$이므로 고리는 실제로 위에서 레일을 누르고 있다.

? 생각해 보기 거친 레일 위의 고리는 정확히 언제 미끄러지는가?

마찰력은 최대 μR까지만 작용할 수 있다. 평형을 유지하는 데 $F > \mu R$가 필요하다면 마찰력은 고리를 붙잡아 둘 수 없고 고리는 미끄러진다. 따라서 고리는

$$\frac{(2k+1)W\cos\theta}{4\sin\theta} > \mu\,\frac{(2k+3)W}{4}.$$

일 때 미끄러진다. 양변에 $4\sin\theta/(W\cos\theta) > 0$을 곱하면

$$2k+1 > (2k+3)\mu\tan\theta,$$

를 얻는다. 이것이 보이려던 결과이다.

소문항 (iii)

$t = \tan\theta$, $s = \sin\theta$라 하자. 각 조건은 k가 어떤 문턱값을 넘어섰다는 뜻이다.

줄. 소문항 (i)에 의해 줄은 $2k+1 > 4s$가 되는 순간, 즉

$$k > k_{\text{끊김}} = \frac{4s-1}{2}.$$

가 되는 순간 끊어진다.

고리. 소문항 (ii)의 조건을 정리하면

$$2k+1 > (2k+3)\mu t \iff 2k(1-\mu t) > 3\mu t - 1.$$

여기서 $\mu t < 1$을 이용한다. $2(1-\mu t) > 0$으로 나누어도 부등호의 방향은 그대로이므로, 고리는

$$k > k_{\text{미끄럼}} = \frac{3\mu t - 1}{2(1-\mu t)}.$$

가 되는 순간 미끄러진다. ($\mu t < 1$이 아니라면 고리는 결코 미끄러지지 않는다. $\mu t \geq 1$이면 모든 k에 대해 $(2k+3)\mu t \geq 2k+3 > 2k+1$이기 때문이다. 이 조건이 주어진 이유가 바로 이것이다.)

k가 0에서부터 커질 때, 두 문턱값 중 더 낮은 쪽을 먼저 넘게 된다. 따라서 줄이 끊어지기 전

에 고리가 미끄러질 필요충분조건은 $k_{\text{미끄럼}} < k_{\text{끊김}}$이다. 먼저 $1-\mu t > 0$을 곱하면

$$\begin{aligned}
\frac{3\mu t - 1}{1-\mu t} < 4s - 1 &\iff 3\mu t - 1 < (4s-1)(1-\mu t) \\
&\iff 3\mu t - 1 < 4s - 1 - 4s\mu t + \mu t \\
&\iff 2\mu t + 4s\mu t < 4s \\
&\iff \mu t(1+2s) < 2s \\
&\iff \mu < \frac{2\sin\theta}{\tan\theta\,(1+2\sin\theta)} = \frac{2\cos\theta}{1+2\sin\theta},
\end{aligned}$$

이며, 마지막 단계에서는 $t(1+2s) > 0$으로 나누었다. 이것이 구하는 조건이다.

막대는 처음에 평형 상태에 있으므로 $k = 0$에서는 어느 문턱값도 아직 넘지 않았다. 각 조건이 "k가 어떤 값보다 크다"의 꼴이므로 두 문턱값은 각각 한 번씩만 넘게 된다. 따라서 두 문턱값을 비교하면 실제로 어느 쪽이 먼저 일어나는지 결정된다.

검산

- 대신 B에 대한 모멘트를 취해도 같은 답을 얻는다. A에 작용하는 힘들의 B에 대한 모멘트는 $R\cdot 2a\cos\theta - F\cdot 2a\sin\theta$이고, 무게의 모멘트는 $Wa\cos\theta$이다. R와 F의 값을 대입하면 $\frac{1}{2}(2k+3)Wa\cos\theta - \frac{1}{2}(2k+1)Wa\cos\theta = Wa\cos\theta$가 되어 무게와 정확히 균형을 이룬다.
- $\theta = 30°$라 하자. 그러면 $k_{\text{끊김}} = \frac{1}{2}$이고, 임계 마찰계수(coefficient of friction)는 $2\cos 30°/(1+2\sin 30°) = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.866$이므로 $\mu t = 0.866 \times 0.577 = \frac{1}{2}$이다. 이 μ에 대해 $k_{\text{미끄럼}} = \frac{3/2-1}{2\cdot\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$이기도 하므로, 경계에서 마땅히 그래야 하듯 두 문턱값이 일치한다.
- 무작위로 고른 여러 θ와 k에 대해 모든 힘과 모멘트가 균형을 이룸을 컴퓨터로 확인하였다. 또 무작위 θ와 μ에 대해 k를 조금씩 늘려 보았더니, 고리가 먼저 미끄러지는 것은 정확히 $\mu < 2\cos\theta/(1+2\sin\theta)$일 때였다.

흔한 실수

- A에 대한 모멘트에서 장력의 수평 성분을 빠뜨리는 것. 수평 성분의 팔 길이는 $2a\sin\theta$이며 장력의 모멘트를 두 배로 만든다. $4\sin\theta$의 4는 여기서 나온다.
- $R = (1+k)W$로 두는 것. 줄이 무게의 일부를 떠받치므로 수직항력은 전체 하중보다 작다.
- $1-\mu\tan\theta$가 양수임을 밝히지 않고 이것으로 나누는 것. 주어진 조건 $\mu\tan\theta < 1$은 바로 이를 위한 것이다.

STEP 너머

이 문제는 정정(statically determinate) 문제이다. 미지수가 세 개(T, R, F)이고, 평면 위의 강체에 대한 평형 방정식도 세 개이다. 소문항 (iii)은 이러한 구조물이 파괴되는 전형적인 방식을, 각 구속 조건이 무너지는 하중을 비교함으로써 보여 준다. 공학자들도 구조물의 어느 부재가 먼저 파괴되는지에 대해 같은 질문을 던진다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 강체 정역학과 토크(torque)를 꼼꼼히 다루고, 이어서 회전 동역학(rotational dynamics)으로 나아간다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.