풀이

STEP II 2019, 문제 1

순수수학 • 삼차함수의 접선

> **STEP II 2019, 1번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2019년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP II 시험지에 있다:
>
> www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

핵심 아이디어

$x = a$에서의 접선(tangent)이 $(p, 0)$을 지날 조건을 쓰고 $f(x) = (x - p)g(x)$를 대입한다. 그러면 거의 모든 항이 소거되고 $g'(a)$의 상수배만 남는다. 따라서 삼차함수(cubic)의 경우, 근(root) p에서 그은 접선은 **나머지** 이차 인수가 정류(stationary)하는 곳, 즉 나머지 두 근의 한가운데에서 곡선에 접한다. 소문항 (ii)는 결국 두 기울기를 비교하는 문제와, 접선이 삼차함수와 만나는 점을 구하는 방정식을 인수분해하는 문제로 귀결된다. 이 방정식은 접점에서 항상 중근(double root)을 가진다.

풀이

첫 번째 결과

$x = a$에서의 접선은 $y = f(a) + f'(a)(x - a)$이다. 곱의 미분법(product rule)에 의해 $f'(x) = g(x) + (x - p)g'(x)$이다. 접선이 $(p, 0)$을 지나는 것은 정확히 다음이 성립할 때이다.

$$\begin{aligned} 0 &= f(a) + f'(a)(p - a) \\ &= (a - p)g(a) + [g(a) + (a - p)g'(a)](p - a) \\ &= (a - p)g(a) - (a - p)g(a) - (a - p)^2 g'(a) \\ &= -(a - p)^2 g'(a). \end{aligned}$$

$a \neq p$이므로 인수 $(a - p)^2$은 0이 아니다. 따라서 이 식은 $g'(a) = 0$일 때, 그리고 그때에만 성립한다. 이로써 양방향의 결과가 한꺼번에 증명된다.

소문항 (i)

여기서 $f(x) = (x-p)g(x)$이고 $g(x) = A(x-q)(x-r) = A(x^2-(q+r)x+qr)$이므로 $g'(x) = A(2x-(q+r))$이다. 첫 번째 결과와 $A \neq 0$에 의해

$$g'(a) = 0 \iff 2a = q+r.$$

($a = \frac{1}{2}(q+r) > q > p$이므로 요구한 대로 $a \neq p$임에 유의한다.)

기울기(gradient)는 $g'(a) = 0$이므로 $f'(a) = g(a) + (a-p)g'(a) = g(a)$이다. $a-q = \frac{1}{2}(r-q)$, $a-r = -\frac{1}{2}(r-q)$이므로

$$f'(a) = A \cdot \tfrac{1}{2}(r-q) \cdot (-\tfrac{1}{2}(r-q)) = -\frac{A(r-q)^2}{4}.$$

소문항 (ii)

이번에는 근 r을 인수로 빼낸다. 즉 $f(x) = (x-r)h(x)$, $h(x) = A(x-p)(x-q)$이다. 첫 번째 결과는 p 대신 r을 넣어도 그대로 적용된다(어느 근을 골랐는지는 증명에서 전혀 쓰이지 않았다). 따라서 $x = c$에서의 접선이 $(r, 0)$을 지나는 것은 $h'(c) = 0$, 즉 $c = \frac{1}{2}(p+q)$일 때, 그리고 그때에만이다. 소문항 (i)과 똑같이 그 기울기는

$$f'(c) = h(c) = A \cdot \tfrac{1}{2}(q-p) \cdot (-\tfrac{1}{2}(q-p)) = -\frac{A(q-p)^2}{4}.$$

그러므로 $A \neq 0$이므로

$$\text{두 접선이 평행} \iff (r-q)^2 = (q-p)^2 \iff r-q = q-p \iff q = \tfrac{1}{2}(p+r)$$

이다. 여기서 가운데 단계는 $r-q > 0$, $q-p > 0$을 이용한 것이므로 양의 제곱근을 취할 수 있다.

생각해 보기 삼차방정식을 풀지 않고, 접선이 삼차함수와 다시 만나는 곳을 어떻게 구할까?

우리는 이미 근 하나를, 그것도 두 번 겹친 근으로 알고 있다. 바로 접점이다. $x = q$에서 기울기는 $f'(q) = A(q-p)(q-r)$이고(곱의 미분법의 나머지 두 항은 $x-q$를 포함하므로 사라진다), $f(q) = 0$이므로 그 점에서의 접선은 $y = A(q-p)(q-r)(x-q)$이다. 이 접선은 다음이 성립하는 곳에서 곡선과 만난다.

$$A(x-p)(x-q)(x-r) = A(q-p)(q-r)(x-q).$$

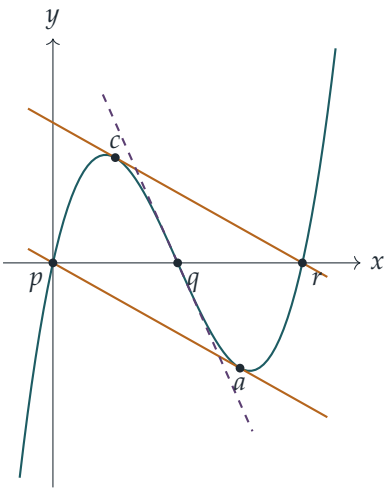
$A \neq 0$으로 나누고 인수 $x-q$를 묶어 내면

$$\begin{aligned} 0 &= (x-q)[(x-p)(x-r) - (q-p)(q-r)] \\ &= (x-q)[x^2 - q^2 - (p+r)(x-q)] \\ &= (x-q)^2(x+q-p-r). \end{aligned}$$

따라서 접선은 $x = q$(접점이므로 예상대로 중근)와 $x = p + r - q$에서 곡선과 만나고, 그 밖의 곳에서는 만나지 않는다. 접선이 곡선과 다시 만나지 않는 것은 이 세 번째 근이 q와 일치할 때, 그리고 그때에만이다.

$$p + r - q = q \iff q = \tfrac{1}{2}(p + r).$$

이는 앞의 조건과 같다. 따라서 소문항 (i)과 (ii)의 두 접선이 평행한 것은 $x = q$에서의 접선이 곡선과 다시 만나지 않을 때, 그리고 그때에만이다.



그림은 $q = \frac{1}{2}(p + r)$인 경우를 나타낸다. 두 접선(호박색)은 평행하고, q에서의 접선(점선)은 그 점에서 곡선을 관통하지만 다른 어느 곳에서도 곡선과 만나지 않는다. 이때 q가 변곡점(point of inflection)이기 때문이다.

검산

- $p = 0, q = 1, r = 2, A = 3$으로 두면 $f(x) = 3x^3 - 9x^2 + 6x$이다. 그러면 $f'(x) = 9x^2 - 18x + 6$이고, $f'(\frac{3}{2}) = -\frac{3}{4}$, $f'(\frac{1}{2}) = -\frac{3}{4}$이다. 둘 다 $-A(r-q)^2/4 = -A(q-p)^2/4 = -\frac{3}{4}$와 같으므로 두 접선은 평행하다. q가 p와 r의 중점이므로 예측한 그대로이다.
- $x = \frac{3}{2}$에서의 접선은 $y = -\frac{9}{8} - \frac{3}{4}(x - \frac{3}{2})$이고, 이 값은 $x = 0$에서 0이다. 즉 실제로 $(p, 0)$을 지난다.
- 위의 모든 항등식은 $p < q < r$와 A를 무작위로 약 2천 번 골라 컴퓨터로 정확한 산술 계산을 하여서도 확인하였다.

흔한 실수

- $(a-p)^2$을 소거할 수 있는 근거가 $a \neq p$라는 점을 잊는 것. 이 조건이 없으면 "그때에만" 방향이 성립하지 않는다. p 자신에서의 접선은 항상 $(p,0)$을 지나기 때문이다.
- 음의 제곱근이 왜 제외되는지 말하지 않고 $(r-q)^2 = (q-p)^2 \Rightarrow r-q = q-p$라고 쓰는 것.
- 접점에서 이미 알고 있는 중근을 이용하지 않고, 교점을 구하기 위해 삼차방정식을 처음부터 풀려고 하는 것.

STEP 너머

$x = q$에서의 접선이 특별한 까닭은, 이때 q가 변곡점, 즉 삼차함수의 대칭중심(centre of symmetry)이기 때문이다. 모든 삼차함수의 그래프는 변곡점을 중심으로 반 바퀴 회전하는 것에 대하여 대칭이며, 바로 이 때문에 두 접선이 평행해진다. 여기서 사용한 접선과 현의 작도는 삼차곡선의 기하학으로 나아가는 첫걸음이다. 삼차곡선의 기하학에서는 직선이 삼차곡선과 만나는 세 번째 교점을 이용하여 곡선 위의 점들에 덧셈 법칙을 정의한다(타원곡선(elliptic curves)). Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*(고급 수학 문제집)에 이런 성격의 문제가 더 실려 있다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.