풀이

STEP I 2019, 문제 9

역학 • 넘어짐과 마찰

STEP I 2019, 9번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2019년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP I 시험지에 있다:

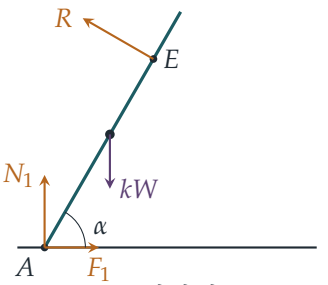
www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

핵심 아이디어

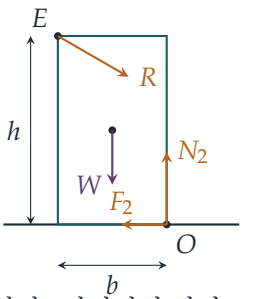
사다리와 상자를 하나의 힘으로 연결된 두 개의 별개 물체로 다룬다. 접촉면이 매끄러우므로(smooth) 그 힘은 사다리에 수직이고, 따라서 힘의 작용선은 α에 의해 정해지며 미지수는 힘의 크기뿐이다. 사다리의 밑단에 대하여 사다리의 모멘트(moment)를 구하면 힘의 크기를 얻고, 상자가 넘어질 때 기준이 되는 모서리에 대하여 상자의 모멘트를 구하면 넘어짐(toppling) 조건을 얻는다. 관계식 $h = b\tan\alpha$는 상자의 모멘트를 배각 공식 꼴의 식으로 간단히 정리하기 위해 주어진 것이다.

풀이

상자는 균일한 강체(rigid body) 직육면체(cuboid)로, 사다리는 가벼운 막대로, 페인트공은 질점(particle)으로 모형화한다. 사다리와 상자 사이의 접촉은 매끄럽고, 두 지면 접촉은 모두 거칠다(rough). 사다리가 닿는 모서리를 E, 사다리의 밑단을 A, 상자의 아래 모서리 중 사다리에서 가장 먼 것(상자가 넘어질 때 회전축이 되는 모서리)을 O라 하자.



사다리



상자 (넘어지기 직전)

소문항 (i)

E에는 마찰(friction)이 없으므로, 상자가 사다리에 작용하는 힘 R는 사다리에 수직이다. E의 높이가 h이므로 사다리를 따라 잰 길이는 $AE = h/\sin\alpha$이다. 페인트공이 높이 λh에 있을 때 사다리를 따라 $\lambda h/\sin\alpha$만큼 올라가 있으므로, A로부터의 수평 거리는 $\lambda h\cot\alpha$이다.

사다리는 가벼우므로 A에 대한 모멘트는 R와 페인트공의 무게에서만 생긴다(N_1과 F_1은 A에 작용한다). R는 AE에 수직이므로 모멘트 팔의 길이는 AE 자체이다.

$$R\cdot\frac{h}{\sin\alpha} = kW\cdot\lambda h\,\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \quad\Longrightarrow\quad R = k\lambda W\cos\alpha,$$

따라서 원하는 결과를 얻는다. (엄밀히 말하면 이 식은 올라가는 모든 순간에 성립하며, 이 때 λh는 페인트공의 현재 높이이다.)

소문항 (ii)

뉴턴의 제3법칙(Newton's third law)에 의해 사다리는 E에서 상자를 사다리에 수직이고 상자 안쪽을 향하는 크기 R의 힘으로 민다. 이 힘의 성분은 수평 방향으로 $R\sin\alpha$(사다리에서 멀어지는 쪽, 즉 O 쪽)이고 연직 아래 방향으로 $R\cos\alpha$이다.

상자가 O를 축으로 넘어지기 직전에는 지면의 반작용이 전부 O에 작용하므로, N_2와 F_2는 O에 대한 모멘트가 없다. O에 대한 모멘트를 구하되, 시계 방향(상자가 넘어지는 방향)을 양으로 잡는다. E는 O로부터 수평 거리 b, 높이 h만큼 떨어져 있으므로

- 높이 h에 작용하는 수평 성분 $R\sin\alpha$의 모멘트는 $+Rh\sin\alpha$이다.
- O에서 사다리 쪽으로 거리 b만큼 떨어진 곳에 작용하는 연직 성분 $R\cos\alpha$의 모멘트는 $-Rb\cos\alpha$이다(그쪽을 아래로 누르면 넘어짐에 저항한다).
- O로부터 거리 $\frac{1}{2}b$에 작용하는 무게 W의 모멘트는 $-\frac{1}{2}Wb$이다.

전체 모멘트가 0이 될 때 상자가 넘어지기 시작한다.

$$R(h\sin\alpha - b\cos\alpha) = \tfrac{1}{2}Wb.$$

생각해 보기 여기서 $h = b\tan\alpha$는 어떻게 도움이 되는가?

이를 대입하면

$$h\sin\alpha - b\cos\alpha = b\,\frac{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha}{\cos\alpha} = -\frac{b\cos 2\alpha}{\cos\alpha}.$$

소문항 (i)의 $R = k\lambda W\cos\alpha$를 이용하면 조건은

$$-k\lambda W\cos\alpha\cdot\frac{b\cos 2\alpha}{\cos\alpha} = \tfrac{1}{2}Wb \quad\Longrightarrow\quad 2k\lambda\cos 2\alpha + 1 = 0,$$

이 되어 원하는 결과를 얻는다. 이 식이 성립하려면 $\cos 2\alpha < 0$, 즉 $\alpha > 45^\circ$이어야 하며, 이는 $h > b$와 일치한다.

소문항 (iii)

상자에 대하여 힘을 분해하면(지면의 반작용은 사다리 쪽 성분 F_2와 위쪽 성분 N_2를 가진다)

$$F_2 = R\sin\alpha, \qquad N_2 = W + R\cos\alpha.$$

상자가 미끄러지지 않으므로 $F_2 \le \mu N_2$, 즉 $\mu \ge \dfrac{R\sin\alpha}{W + R\cos\alpha}$이다.

생각해 보기 올라가는 동안 어느 순간에 이 조건을 만족하기가 가장 어려운가?

비 $\dfrac{R\sin\alpha}{W + R\cos\alpha} = \dfrac{\sin\alpha}{W/R + \cos\alpha}$는 R에 대하여 증가하고, R는 페인트공이 올라갈수록 커진다. 따라서 마찰이 가장 크게 요구되는 때는 넘어지기 직전이며, 그 순간에 부등식이 성립해야 한다. (ii)에서 $k\lambda = -\dfrac{1}{2\cos 2\alpha}$이므로

$$R = -\frac{W\cos\alpha}{2\cos 2\alpha}.$$

그러면

$$R\sin\alpha = -\frac{W\sin\alpha\cos\alpha}{2\cos 2\alpha} = -\frac{W\sin 2\alpha}{4\cos 2\alpha},$$

$$W + R\cos\alpha = W\left(1 - \frac{\cos^2\alpha}{2\cos 2\alpha}\right) = W\,\frac{4\cos 2\alpha - (1+\cos 2\alpha)}{4\cos 2\alpha} = W\,\frac{3\cos 2\alpha - 1}{4\cos 2\alpha},$$

이다. 여기서 $2\cos^2\alpha = 1 + \cos 2\alpha$를 이용하였다. 나누면

$$\mu \ge \frac{-\sin 2\alpha}{3\cos 2\alpha - 1} = \frac{\sin 2\alpha}{1 - 3\cos 2\alpha},$$

이 되어 원하는 결과를 얻는다. $45^\circ < \alpha < 90^\circ$이면 $\sin 2\alpha > 0$이고 $\cos 2\alpha < 0$이므로 분자와 분모는 모두 양수이다.

검산

- $\alpha = 60^\circ$로 잡으면 $\cos 2\alpha = -\frac{1}{2}$이다. 소문항 (ii)에서 $k\lambda = 1$이므로 $R = \frac{1}{2}W$이다. 그러면 $F_2 = \frac{\sqrt{3}}{4}W$, $N_2 = \frac{5}{4}W$이므로 $\mu \ge \frac{\sqrt{3}}{5} \approx 0.346$이고, 이는 $\sin 120^\circ / (1 - 3\cos 120^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}/\frac{5}{2}$와 일치한다.
- $\alpha \to 45^\circ$일 때(높이가 너비보다 아주 조금만 큰, 정육면체에 가까운 상자), $\cos 2\alpha \to 0$이고 (ii)에서 $k\lambda \to \infty$가 필요하다. E에서 미는 힘이 거의 직선 EO를 따르므로 회전 효과가 거의 없기 때문이다. 이는 기하적 상황과 맞아떨어진다. $h = b\tan\alpha$일 때 α가 45°에 가까우면 E를 지나는 R의 작용선이 거의 O를 지난다.

- 모멘트 방정식, 넘어지는 높이, 마찰 한계는 α, b, k, W를 무작위로 여러 번 골라 컴퓨터로도 확인하였다.

흔한 실수

- E에서의 힘을 (매끄러운 벽의 경우처럼) 수평으로 잡는 것. 여기서는 모서리와 접촉하므로 힘은 사다리에 수직이다.
- R의 연직 성분이 상자의 수직항력(normal reaction)에 더해진다는 사실을 잊어, $N_2 = W + R\cos\alpha$가 아니라 W로 놓는 것.
- 상자의 엉뚱한 아래 모서리에 대하여 모멘트를 구하는 것. 상자는 사다리에서 먼 쪽 모서리를 축으로 넘어진다.

STEP 너머

이것은 두 물체의 정역학(statics)이다. 각 물체를 따로 떼어 내고, 접촉점에서 뉴턴의 제3법칙을 적용하며, 미지수가 사라지도록 모멘트의 중심을 고른다. 물체가 먼저 미끄러지는지 넘어지는지, 하중이 커질 때 어떤 제약이 먼저 깨지는지에 관한 질문은 공학 역학과 접촉하는 강체에 관한 연구 전반에 걸쳐 나타난다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 이러한 관점에서 강체의 정역학과 마찰을 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.