풀이

STEP I 2019, 문제 8

순수수학 • 치환적분

STEP I 2019, 8번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2019년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP I 시험지에 있다:

www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

핵심 아이디어

f를 직접 계산하지 말라고 했으므로, 모든 소문항은 적분을 **변형**하여 어떤 위끝 X에 대해

$$\int_1^X \sqrt{\frac{t-1}{t+1}}\,\mathrm{d}t = \mathrm{f}(X)$$

와 정확히 같은 꼴이 되도록 만드는 문제이다. 거의 모든 일은 두 가지 조작이 해낸다. 하나는 $\frac{u-k}{u+k}$를 $\frac{t-1}{t+1}$로 바꾸는 **늘이기**$(u = kt)$이고, 다른 하나는 분수 속 두 수가 0에 대하여 대칭이 되게 하는 **평행이동**$(u = t + c)$이다. 마지막 소문항에서는 몫의 제곱근을 알맞은 꼴의 함수로 바꾸기 위해 치환이 하나 더 필요하다.

풀이

풀이 전체에 걸쳐, 치환(substitution)은 피적분함수(integrand)와 미분소(differential), 그리고 적분 구간의 끝도 바꾼다는 사실을 이용한다. 답이 드러나는 곳은 위끝이다.

소문항 (i)

$u = 2t$로 놓으면 $\frac{2t-2}{2t+2} = \frac{t-1}{t+1}$이므로 피적분함수 $\sqrt{\frac{u-2}{u+2}}$는 $\sqrt{\frac{t-1}{t+1}}$가 된다. $\mathrm{d}u = 2\,\mathrm{d}t$이고 적분 구간의 끝은 $u = 2 \mapsto t = 1$, $u = x \mapsto t = \frac{1}{2}x$이므로

$$\int_2^x \sqrt{\frac{u-2}{u+2}}\,\mathrm{d}u = \int_1^{x/2} \sqrt{\frac{t-1}{t+1}}\,2\,\mathrm{d}t = 2\,\mathrm{f}(\tfrac{1}{2}x).$$

조건 $x > 2$는 바로 $\frac{1}{2}x > 1$이 되게 하여 $\mathrm{f}(\frac{1}{2}x)$가 정의되도록 해 준다. 이것이 구하는 결과이다.

소문항 (ii)

여기서 분수 속의 수는 0과 -4로, o에 대하여 대칭이 아니다. 두 수의 중점은 -2이므로 2만큼 평행이동하여 $u = v - 2$로 놓는다. 그러면 $\frac{u}{u+4} = \frac{v-2}{v+2}$, $\mathrm{d}u = \mathrm{d}v$이고, 적분 구간의 끝 $u = 0, x$는 $v = 2, x+2$가 된다. 이제 x 대신 (2보다 큰) $x+2$를 넣어 소문항 (i)을 적용하면 끝난다.

$$\int_0^x \sqrt{\frac{u}{u+4}}\,\mathrm{d}u = \int_2^{x+2} \sqrt{\frac{v-2}{v+2}}\,\mathrm{d}v = 2\,\mathrm{f}(\tfrac{1}{2}x+1).$$

소문항 (iii)

분수 속의 수는 5와 -1이고, 중점은 2이다. 따라서 $u = v + 2$로 놓으면

$$\frac{u-5}{u+1} = \frac{v-3}{v+3},$$

이고, 적분 구간의 끝 $u = 5, x$는 $v = 3, x-2$가 된다. 이제 $v = 3t$로 놓아 3배로 늘이면 $\frac{v-3}{v+3} = \frac{t-1}{t+1}$, $\mathrm{d}v = 3\,\mathrm{d}t$이고 적분 구간의 끝은 $t = 1, \frac{1}{3}(x-2)$이다.

$$\begin{aligned}\int_5^x \sqrt{\frac{u-5}{u+1}}\,\mathrm{d}u = \int_3^{x-2} \sqrt{\frac{v-3}{v+3}}\,\mathrm{d}v &= \int_1^{(x-2)/3} \sqrt{\frac{t-1}{t+1}}\,3\,\mathrm{d}t \\ &= 3\,\mathrm{f}\Big(\frac{x-2}{3}\Big).\end{aligned}$$

$x > 5$이므로 함수에 넣는 값 $\frac{x-2}{3}$는 당연히 1보다 크다. (두 치환을 합치면 하나의 치환 $u = 3t + 2$가 된다.)

소문항 (iv)

이 피적분함수에는 몫의 제곱근이 전혀 보이지 않고, 거듭제곱도 맞지 않는다. 분자에는 u^2이, 근호 안에는 $u^2 + 4$가 있다.

> ? **생각해 보기** 어떤 치환을 하면 $u^2 + 4$가 소문항 (ii)의 $u + 4$로 바뀔까?

$u^2 = w$로 놓으면 ($[1,2]$에서 $u > 0$이므로) $u = \sqrt{w}$이고 $\mathrm{d}u = \dfrac{\mathrm{d}w}{2\sqrt{w}}$이다. 적분 구간의 끝 $u = 1, 2$는 $w = 1, 4$가 되고,

$$\frac{u^2}{\sqrt{u^2+4}}\,\mathrm{d}u = \frac{w}{\sqrt{w+4}} \cdot \frac{\mathrm{d}w}{2\sqrt{w}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{w}}{\sqrt{w+4}}\,\mathrm{d}w = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{w}{w+4}}\,\mathrm{d}w,$$

이는 정확히 소문항 (ii)의 피적분함수이다. 적분 구간을 0에서 나누고 소문항 (ii)를 두 번($x = 4$와 $x = 1$) 이용하면

$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{u^2}{\sqrt{u^2+4}}\,\mathrm{d}u &= \frac{1}{2}\left(\int_0^4 \sqrt{\frac{w}{w+4}}\,\mathrm{d}w - \int_0^1 \sqrt{\frac{w}{w+4}}\,\mathrm{d}w\right) \\ &= \frac{1}{2}\Big(2\,\mathrm{f}(3) - 2\,\mathrm{f}(\tfrac{3}{2})\Big) = \mathrm{f}(3) - \mathrm{f}(\tfrac{3}{2}).\end{aligned}$$

검산

- 각 답은 아래끝에서 올바르게 행동한다. (i)에서 $x = 2$이면 $2\,\mathrm{f}(1) = 0$, (ii)에서 $x = 0$이면 $2\,\mathrm{f}(1) = 0$, (iii)에서 $x = 5$이면 $3\,\mathrm{f}(1) = 0$이다.
- 미분해 보는 것은 빠른 검사 방법이다. (iii)의 경우 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,3\,\mathrm{f}\left(\frac{x-2}{3}\right) = \mathrm{f}'\left(\frac{x-2}{3}\right) = \sqrt{\frac{x-5}{x+1}}$로, 마땅히 나와야 할 결과가 나온다.
- 수치적으로, (iv)의 양변은 모두 0.91007이고, (iii)에서 $x = 11$일 때 양변은 모두 3.19704이다. 각각 직접 수치적분(numerical integration)으로 구한 값이다.

흔한 실수

- $\mathrm{d}u = k\,\mathrm{d}t$에서 생기는 인수를 빠뜨려 $2\,\mathrm{f}(\frac{1}{2}x)$ 대신 $\mathrm{f}(\frac{1}{2}x)$를 얻는 실수.
- 피적분함수만 바꾸고 적분 구간의 끝, 특히 답이 자리하는 위끝을 바꾸지 않는 실수.
- (iv)에서 결과를 $\frac{1}{2} \cdot 2\,\mathrm{f}(3)$로만 쓰는 실수. 소문항 (ii)는 0부터의 적분을 주므로, 0부터 1까지의 부분을 빼야 한다.

STEP 너머

여기서 핵심은, 한 무리의 적분이 실제로는 서로 다른 아핀 변수변환(affine change of variable) $u = at + b$를 통해 본 하나의 적분이라는 점이다. 식 속에 숨어 있는 "표준형"을 알아보는 능력은 대학의 해석학(analysis)에서, 그리고 미분방정식을 표준형(canonical form)으로 바꿀 때 끊임없이 쓰인다. (사실 함수 f는 쌍곡선함수(hyperbolic function)를 써서 닫힌 형태로 구할 수 있지만, 이 문제는 그것 없이도 꽤 멀리 갈 수 있음을 보여 준다.) 치환과 적분에 대한 엄밀한 이론은 Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 입문서)를, 이런 유형의 문제를 더 많이 보려면 Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*(STEP 대비 문제집)를 참고하라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.