풀이

STEP I 2019, 문제 7

순수수학 • 무리성과 합동식

> **STEP I 2019, 7번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2019년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP I 시험지에 있다:
>
> www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

핵심 아이디어

$\sqrt{2}+\sqrt{3}=a/b$를 기약분수(lowest terms)로 나타낼 수 있다고 하면, 두 번 제곱하여 근호(surd)를 없애고 정수 a와 b에 대한 다항식 방정식을 얻는다. 그다음 이 방정식을 작은 소수(prime)를 법(modulo)으로 하여 살펴본다. 방정식에 의해 그 소수는 a와 b를 모두 나누거나, 둘 다 나누지 않아야 한다. "모두 나눈다"는 기약분수라는 가정에 모순이고, "둘 다 나누지 않는다"는 나머지를 따져 보면 불가능하다. 결국 핵심은 나머지가 실제로 충돌하는 소수를 고르는 데 있다.

풀이

소문항 (i)

1단계. 모든 정수는 어떤 정수 k에 대하여 $3k$, $3k+1$, $3k-1$ 중 하나이므로, $3\nmid a$이면 $a=3k\pm1$이다. 어느 경우든

$$a^2=9k^2\pm6k+1=3(3k^2\pm2k)+1,$$

이므로 a^2은 3의 배수보다 1만큼 크다.

3단계. $\dfrac{a}{b}=\sqrt{2}+\sqrt{3}$의 양변을 제곱하면

$$\frac{a^2}{b^2}=2+2\sqrt{6}+3,\qquad \text{따라서}\qquad a^2-5b^2=2\sqrt{6}\,b^2.$$

이제 근호가 한쪽에만 있으므로 다시 제곱하면 근호가 사라진다.

$$a^4-10a^2b^2+25b^4=24b^4,$$
$$a^4+b^4=10a^2b^2,$$

이것이 보이려던 식이다. (여기서는 이 방향의 함의만 필요하다. 즉 2단계의 a, b는 반드시 이 방정식을 만족해야 한다.)

4단계. $3 \mid a$라고 하자. 3단계의 식을 정리하면

$$b^4 = 10a^2b^2 - a^4 = a^2\,(10b^2 - a^2),$$

이고 우변은 3으로 (사실은 9로도) 나누어떨어진다. 만약 $3 \nmid b$이면 1단계에 의해 $b^2 = 3m + 1$이므로 $b^4 = (b^2)^2 = 9m^2 + 6m + 1$은 3의 배수가 **아니다**. 이는 모순이다. 따라서 $3 \mid b$이다.

> **생각해 보기** 4단계는 $3 \mid a$인 경우를 다룬다. 3이 a와 b 중 어느 것도 나누지 않는 경우는 어떻게 되는가?

5단계. 3단계의 방정식은 a와 b에 대하여 대칭이므로, 4단계는 두 문자의 역할을 바꾸어도 성립한다. 즉 $3 \mid b$이면 $3 \mid a$이다. a와 b는 1보다 큰 공약수를 갖지 않으므로 둘 다 3의 배수일 수는 없고, 따라서 4단계에 의해 둘 다 3의 배수가 아니다. 이 경우는 2–4단계에서 다루지 않았으며, 바로 여기서 1단계가 쓰인다. $a^2 = 3r + 1$, $b^2 = 3s + 1$이라 하자. 그러면 a^4, b^4, a^2b^2은 모두 3의 배수보다 1만큼 크다(이런 꼴의 두 수의 곱은 다시 이런 꼴이다). 3단계의 식을 3을 법으로 하여 계산하면 $10 \equiv 1$이므로

$$a^4 + b^4 \equiv 1 + 1 = 2, \qquad 10a^2b^2 \equiv 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1 \pmod 3,$$

이다. 3단계 식의 양변을 3으로 나눈 나머지가 서로 다르므로 이는 불가능하다. 따라서 그러한 a와 b는 존재하지 않는다. 또한 $\sqrt{2} + \sqrt{3} > 0$이므로 이 수가 유리수라면 서로소(coprime)인 양의 정수 a, b로 나타낼 수 있다. 그러므로 $\sqrt{2} + \sqrt{3}$은 무리수(irrational)이다.

소문항 (ii)

a, b가 1보다 큰 공약수를 갖지 않는 양의 정수이고 $\sqrt{6} + \sqrt{7} = a/b$라고 가정하자. 앞에서와 같이

$$\frac{a^2}{b^2} = 13 + 2\sqrt{42} \quad \Longrightarrow \quad (a^2 - 13b^2)^2 = 168\,b^4,$$

이고, 이를 전개하면 $a^4 - 26a^2b^2 + 169b^4 = 168b^4$, 즉

$$a^4 + b^4 = 26a^2b^2.$$

5를 법으로 한 제곱수. $5 \nmid a$이면 $a = 5k \pm 1$ 또는 $a = 5k \pm 2$이므로

$$a^2 = 5(5k^2 \pm 2k) + 1 \qquad \text{또는} \qquad a^2 = 5(5k^2 \pm 4k) + 4.$$

따라서 $a^2 \equiv \pm 1 \pmod 5$이고, 그러므로 $a^4 \equiv 1 \pmod 5$이다.

나누어떨어짐. $5 \mid a$이면 $b^4 = a^2(26b^2 - a^2)$은 5의 배수이다. 그런데 $5 \nmid b$이면 $b^4 \equiv 1 \pmod 5$이므로 $5 \mid b$이어야 한다. 대칭성에 의해 $5 \mid b$이면 $5 \mid a$이다. a와 b는 서로소이므로 둘 다 5로 나누어떨어지지 않는다.

모순. 이제 $a^4 \equiv b^4 \equiv 1$이고 $a^2b^2 \equiv (\pm 1)(\pm 1) = \pm 1 \pmod 5$이다. $26 \equiv 1$이므로

$$a^4 + b^4 \equiv 2, \qquad 26a^2b^2 \equiv \pm 1 \pmod 5.$$

그런데 $2 \not\equiv \pm 1 \pmod 5$이므로 방정식이 성립할 수 없다. 따라서 $\sqrt{6} + \sqrt{7}$은 무리수이다.

생각해 보기 여기서 5 대신 3을 쓰려고 하면 어느 단계가 무너지는가?

3이 실패하는 이유. 논증의 앞부분은 3을 법으로 해도 여전히 성립한다. $3 \mid a$이면 $3 \mid b^4$이므로 $3 \mid b$이고, 따라서 a와 b는 둘 다 3의 배수가 아니다. 그러나 그러면 $a^4 \equiv b^4 \equiv a^2b^2 \equiv 1 \pmod 3$이고, $26 \equiv 2 \pmod 3$이므로

$$a^4 + b^4 \equiv 2 \qquad \text{그리고} \qquad 26a^2b^2 \equiv 2 \pmod 3.$$

양변이 일치하므로 모순이 생기지 않는다. 3을 법으로 하면 방정식 $a^4 + b^4 = 26a^2b^2$은 3의 배수가 아닌 **모든** 쌍에 대해 성립하므로, 3으로 나누어떨어지는지를 따져서는 이 방정식을 배제할 수 없다. (소문항 (i)에서는 계수가 $10 \equiv 1$이었고, $2 \neq 1$이라는 사실이 충돌을 일으켰다. 여기서는 계수가 $26 \equiv 2$이므로 충돌이 사라진다.)

검산

- 수치로 확인하면, $x = \sqrt{2} + \sqrt{3} \approx 3.1463$에 대하여 $x^4 - 10x^2 + 1 \approx 0$이다(오차 약 10^{-14}). 마찬가지로 $y = \sqrt{6} + \sqrt{7} \approx 5.0952$에 대하여 $y^4 - 26y^2 + 1 \approx 0$이다. 따라서 두 사차방정식은 옳다.
- 나머지의 모든 쌍을 대입해 보자. $a^4 + b^4 \equiv 10a^2b^2 \pmod 3$의 해는 $a \equiv b \equiv 0$뿐이고, $a^4 + b^4 \equiv 26a^2b^2 \pmod 5$도 마찬가지이다. 그러나 $a^4 + b^4 \equiv 26a^2b^2 \pmod 3$은 $(1,1), (1,2), (2,1), (2,2)$로도 성립한다. 바로 이 때문에 소문항 (ii)에서 3이 실패한다.
- 컴퓨터로 탐색한 결과, $a, b \leq 400$인 서로소인 양의 정수 중 두 방정식 가운데 어느 하나라도 만족하는 것은 없었다.

흔한 실수

- 4단계에서 멈추는 것. 4단계는 a와 b가 모두 3의 배수일 수 없음만 보여 준다. 둘 다 3의 배수가 아닌 경우를 처리하려면 여전히 1단계가 필요하다.
- 이유 없이 $3 \mid b^4 \Rightarrow 3 \mid b$라고 주장하는 것. 그 이유는 1단계가 제공한다. $3 \nmid b$이면 b^4을 3으로 나눈 나머지는 1이다.

▶ 소문항 (ii)에서 제곱수를 5로 나눈 나머지가 4(즉 -1)일 수도 있다는 점을 잊는 것. 따라서 a^2b^2은 1만이 아니라 $\equiv \pm 1$일 수 있다.

STEP 너머

수 $\sqrt{2}+\sqrt{3}$은 x^4-10x^2+1의 근이며, 여기서의 논증은 사실 이 다항식이 유리근을 갖지 않는다는 증명이다. 유리근 정리(rational root theorem)를 쓰면 더 빨리 보일 수 있다. 유리근이 있다면 ± 1이어야 하는데, 둘 다 근이 아니다. 다항식을 소수를 법으로 하여 줄여서 근이나 인수가 없음을 보이는 것은 대학 1학년 대수학의 표준적인 도구이다(예를 들어 기약성(irreducibility) 판정에서). 흥미롭게도 x^4-10x^2+1은 유리수 위에서 기약이지만 모든 소수를 법으로 하면 **인수분해된다**. 이는 유명한 예이다. Allenby의 *Rings, Fields and Groups*(환, 체, 군)에서 이러한 아이디어를 전개하며, Davenport의 *The Higher Arithmetic*(고등 산술)은 합동식(congruence)에 대한 훌륭한 입문서이다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.