풀이

STEP I 2019, 문제 6

순수수학 • 부등식과 한계

> **STEP I 2019, 6번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2019년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP I 시험지에 있다:
>
> www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

핵심 아이디어

각 방정식은 직접 풀기에는 막막해 보이지만, "어떤 것 = 다른 어떤 것"의 꼴로 나누어 쓸 수 있다. 이때 좌변은 어떤 수보다 결코 작아질 수 없고, 우변은 같은 수보다 결코 커질 수 없다. 그러면 방정식은 **양변이 모두** 정확히 그 수에 있을 때에만 성립하고, 각각의 조건은 쉽게 풀 수 있다. 각 부분의 앞쪽 소문항들은 이 두 한계(bound)를 세우기 위해 있는 것이다.

풀이

소문항 (i)

완전제곱식으로 고치면(completing the square)

$$\begin{aligned} 9x^2 - 12x\cos\theta + 4 &= (3x - 2\cos\theta)^2 - 4\cos^2\theta + 4 \\ &= (3x - 2\cos\theta)^2 + 4\sin^2\theta. \end{aligned}$$

제곱은 결코 음수가 아니므로 최솟값은 $4\sin^2\theta$이고, 이 값은 정확히 $x = \frac{2}{3}\cos\theta$일 때 얻어진다.

사차식(quartic)을 x^2에 대한 이차식(quadratic)으로 보면

$$12x^2\sin\theta - 9x^4 = -(3x^2 - 2\sin\theta)^2 + 4\sin^2\theta.$$

따라서 $12x^2\sin\theta - 9x^4 \leq 4\sin^2\theta$이고, 등호는 정확히 $x^2 = \frac{2}{3}\sin\theta$일 때 성립한다. $0 < \theta < \pi$이므로 $\sin\theta > 0$이고, 따라서 이 x^2의 값은 실제로 얻어지며 최댓값은 $4\sin^2\theta$이다.

이제 주어진 방정식의 x^2 항을 $9x^2 - 12x^2\sin\theta$로 나누어 쓰고 정리하면

$$\underbrace{9x^2 - 12x\cos\theta + 4}_{\geq 4\sin^2\theta} = \underbrace{12x^2\sin\theta - 9x^4}_{\leq 4\sin^2\theta}.$$

생각해 보기 적어도 $4\sin^2\theta$인 양이 어떻게 많아야 $4\sin^2\theta$인 양과 같을 수 있을까?

둘 다 $4\sin^2\theta$와 같을 때뿐이다. 따라서 방정식은

$$x = \tfrac{2}{3}\cos\theta \qquad \text{그리고} \qquad x^2 = \tfrac{2}{3}\sin\theta.$$

가 **모두** 성립할 때, 그리고 그때에만 성립한다. x를 소거하면 $\frac{4}{9}\cos^2\theta = \frac{2}{3}\sin\theta$이므로 $2\cos^2\theta = 3\sin\theta$, 즉 $2 - 2\sin^2\theta = 3\sin\theta$이다. 따라서

$$2\sin^2\theta + 3\sin\theta - 2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad (2\sin\theta - 1)(\sin\theta + 2) = 0.$$

$\sin\theta \neq -2$이므로 $\sin\theta = \frac{1}{2}$이고, 따라서 $\theta = \frac{\pi}{6}$ 또는 $\theta = \frac{5\pi}{6}$이다. 그러면 $x = \frac{2}{3}\cos\theta$로부터 각각 $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ 또는 $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$을 얻고, 두 경우 모두 요구한 대로 $x^2 = \frac{1}{3} = \frac{2}{3}\sin\theta$이다. 해는

$$(x,\theta) = \left(\tfrac{1}{\sqrt{3}}, \tfrac{\pi}{6}\right) \quad \text{그리고} \quad (x,\theta) = \left(-\tfrac{1}{\sqrt{3}}, \tfrac{5\pi}{6}\right).$$

이다.

소문항 (ii)

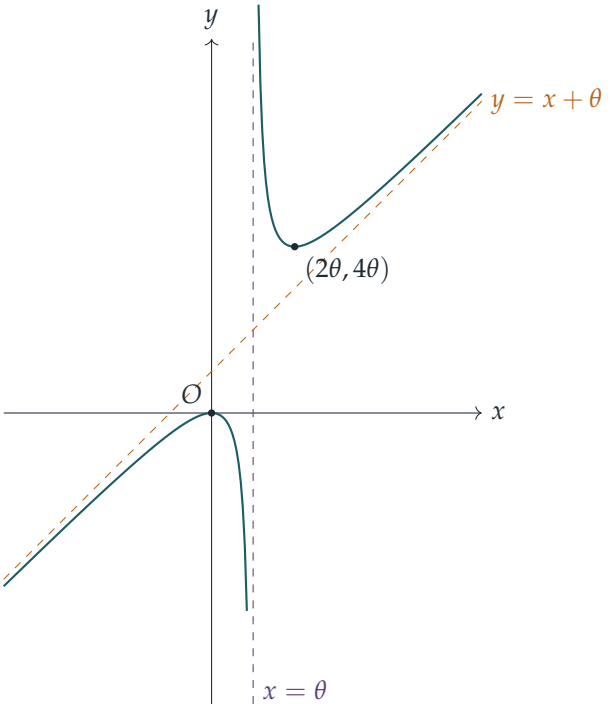
개형 그리기. 여기서 $\theta > 0$이다. 곡선 $y = \dfrac{x^2}{x-\theta}$는 원점을 지나고(다른 곳에서는 축과 만나지 않는다), 수직 점근선(asymptote) $x = \theta$를 가진다. 나눗셈을 하면

$$\frac{x^2}{x-\theta} = x + \theta + \frac{\theta^2}{x-\theta},$$

이므로 $y = x + \theta$는 기울어진 점근선이다. 곡선은 $x > \theta$에서는 이 점근선 위에, $x < \theta$에서는 그 아래에 있다. 몫의 미분법(quotient rule)으로 미분하면

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{2x(x-\theta) - x^2}{(x-\theta)^2} = \frac{x(x-2\theta)}{(x-\theta)^2},$$

이므로 정류점(stationary point)은 극대점(local maximum)인 $(0,0)$과 극소점(local minimum)인 $(2\theta, 4\theta)$이다(기울기의 부호가 $x = 0$에서 $+$에서 $-$로, $x = 2\theta$에서 $-$에서 $+$로 바뀐다).



추론하기. $x < \theta$이면 분자 $x^2 \geq 0$이고 분모는 음수이므로 $y \leq 0$이다. $x > \theta$이면 이 가지의 가장 낮은 점이 $(2\theta, 4\theta)$이므로 $y \geq 4\theta$이다. 대수적으로는 $x > \theta$일 때

$$x^2 - 4\theta(x-\theta) = (x-2\theta)^2 \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{x^2}{x-\theta} \geq 4\theta,$$

이다. 여기서 양수인 $x-\theta$로 나누었다. 따라서 곡선은 0과 4θ 사이의 값(양 끝 제외)을 결코 갖지 않는다.

삼각함수의 한계. 분자는 $\sin^2\theta\cos^2 x \leq 1 \cdot 1 = 1$을 만족하고, 분모는 $1 + \cos^2\theta\sin^2 x \geq 1$을 만족한다. 많아야 1인 수를 적어도 1인(그리고 양수인) 수로 나누면 많아야 1이다.

$$\frac{\sin^2\theta\cos^2 x}{1+\cos^2\theta\sin^2 x} \leq 1.$$

등호가 성립하려면 $\sin^2\theta\cos^2 x = 1$과 $\cos^2\theta\sin^2 x = 0$이 모두 필요하다. 또한 이 분수는 제곱을 양수로 나눈 것이므로 ≥ 0임에 주목하자.

마지막 방정식. $L = \dfrac{x^2}{4\theta(x-\theta)}$라 하고, 우변을 R이라 하자. 앞의 결과를 $4\theta > 0$으로 나누면 $L \leq 0$이거나 $L \geq 1$이다. 그런데 $0 \leq R \leq 1$이다.

생각해 보기 ≤ 0이거나 ≥ 1인 수가 $[0,1]$에 있는 수와 어디에서 만날 수 있을까?

0 또는 1에서뿐이다. 따라서 $L = R = 0$ 또는 $L = R = 1$이어야 한다.

- $L = 0$이면 $x = 0$이어야 하는데, 그러면 $0 < \theta < \pi$이므로 $R = \sin^2\theta > 0$이다. 해가 없다.
- $L = 1$은 $x^2 = 4\theta(x - \theta)$, 즉 $(x - 2\theta)^2 = 0$을 뜻하므로 $x = 2\theta$이다. $R = 1$이려면 $\sin^2\theta\cos^2 x = 1$이어야 하고, 이로부터 $\sin^2\theta = 1$이고 $\cos^2 x = 1$이어야 한다. $0 < \theta < \pi$이므로 $\theta = \frac{\pi}{2}$이고, 따라서 $x = \pi$이며, 실제로 $\cos^2\pi = 1$이고 $\cos^2\theta\sin^2 x = 0$이다.

유일한 해는 $x = \pi, \theta = \frac{\pi}{2}$이다.

검산

- 사차식에 $x = \frac{1}{\sqrt{3}}, \theta = \frac{\pi}{6}$을 대입하면 $9\cdot\frac{1}{9} + (9-6)\cdot\frac{1}{3} - 12\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + 4 = 1 + 1 - 6 + 4 = 0$이다.
- 마지막 방정식에서 $x = \pi, \theta = \frac{\pi}{2}$일 때 $L = \pi^2/(2\pi\cdot\frac{\pi}{2}) = 1$이고 $R = 1\cdot 1/(1+0) = 1$이다.
- (x, θ)의 촘촘한 격자에서 컴퓨터로 탐색해 보았더니, 제외된 끝점 $\theta \to 0$과 $\theta \to \pi$ 근처에서 끼어드는 가짜 해($\sin\theta \to 0$이 되어 한계가 무너지는 곳)를 빼면 어느 방정식에서도 다른 근사해는 발견되지 않았다.

흔한 실수

- $\sin\theta = \frac{1}{2}$을 찾고 멈추는 것: x는 $x = \frac{2}{3}\cos\theta$를 만족해야 하고, 이것이 각 θ에 대해 x의 **부호**를 정하므로 $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{5\pi}{6})$은 해가 아니다.
- 마지막 부분에서 $L = R = 0$인 경우를 잊는 것: 이 경우는 배제해야 하며, 오직 $\sin\theta \neq 0$이기 때문에 배제된다.
- 분모가 이를 망치지 않는 이유를 말하지 않고 "$\sin^2$과 $\cos^2$이 많아야 1이므로" 분수가 ≤ 1이라고 주장하는 것.

STEP 너머

방정식을 한 값에서 만나는 하한과 상한 사이에 가두는 기법은 해석학의 기본 도구이다. 이것은 산술-기하 평균 부등식(AM–GM)이나 코시-슈바르츠(Cauchy–Schwarz) 부등식 같은 부등식에서 등호가 성립함을 증명하는 방법이며, 조임 정리(squeeze theorem)가 극한을 결정하는 방법이기도 하다. "이 부등식은 언제 등호가 성립하는가?"라고 묻는 법을 익히는 것이 흔히 풀이에 이르는 가장 빠른 길이다. 이런 정신의 내용을 더 보려면 Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 입문서)나 Siklos의 문제집 *Advanced Problems in*

Mathematics(고급 수학 문제집)를 참고하라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.