풀이

STEP I 2019, 문제 5

순수수학 • 3차원 벡터

> **STEP I 2019, 5번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2019년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP I 시험지에 있다:
>
> www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

핵심 아이디어

두 벡터는 성분(component)이 모두 같을 때 정확히 서로 같으므로, 이 문제의 모든 기하학적 조건은 p, q, r, s에 대한 몇 개의 간단한 방정식으로 바뀐다. 네 점이 한 평면 위에 있다(coplanar)는 것은 스칼라 삼중곱(scalar triple product), 즉 3×3 행렬식(determinant)이 0이라는 것이다. 조건을 좌표로 나타내고 나면, 각 소문항은 짧은 대수 계산이 된다.

풀이

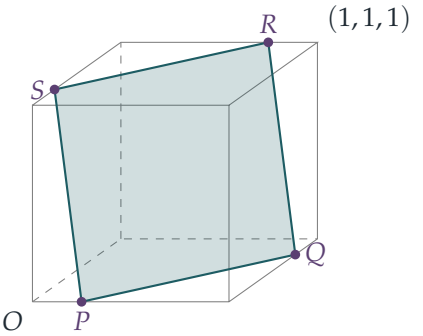
소문항 (i)

$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{SR}$이면 마주 보는 두 변 PQ와 SR는 평행하고 길이가 같으므로 $PQRS$는 **평행사변형(parallelogram)**이다. (이때 $\overrightarrow{PS} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} - \overrightarrow{SR}$로부터 $\overrightarrow{PS} = \overrightarrow{QR}$도 성립한다.)

또한 $|\overrightarrow{PQ}| = |\overrightarrow{PS}|$이면 평행사변형의 이웃한 두 변의 길이가 같으므로 네 변의 길이가 모두 같다. 따라서 $PQRS$는 **마름모(rhombus)**이다.

소문항 (ii): 한 평면 위에 있을 조건

네 점은 단위 정육면체(unit cube)의 모서리 위에 있으므로 $p, q, r, s \in [0, 1]$이다. 여기서 P와 Q는 면 $z = 0$ 위에, R와 S는 면 $z = 1$ 위에 있다.



네 점이 한 평면 위에 있을 필요충분조건은 $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{PS}$, $\overrightarrow{PR}$가 일차종속(linearly dependent)인 것, 즉 이들의 스칼라 삼중곱이 0인 것이다.

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 1-p \\ q \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{PS} = \begin{pmatrix} -p \\ s \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{PR} = \begin{pmatrix} r-p \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

이므로 행렬식을 첫째 행을 따라 전개하면

$$\begin{vmatrix} 1-p & q & 0 \\ -p & s & 1 \\ r-p & 1 & 1 \end{vmatrix} = (1-p)(s-1) - q(-p-(r-p)) + 0$$

$$= (1-p)(s-1) + qr.$$

이다. 이것을 0으로 놓으면 요구한 대로 $rq = (1-s)(1-p)$를 얻는다.

행렬식을 쓰고 싶지 않다면, P, Q, R를 지나는 평면을 $\overrightarrow{OP} + \lambda\overrightarrow{PQ} + \mu\overrightarrow{PR}$로 나타내자. 이 평면 위의 점은

$$(p + \lambda(1-p) + \mu(r-p),\ \lambda q + \mu,\ \mu).$$

이다. $S = (0, s, 1)$가 이 평면 위에 있으려면 z성분에서 $\mu = 1$, 그다음 y성분에서 $\lambda q = s - 1$, x성분에서 $r + \lambda(1-p) = 0$이어야 한다. 마지막 식에 q를 곱하고 대입하면 같은 조건 $rq + (s-1)(1-p) = 0$을 얻는다. (여기서는 P, Q, R가 한 직선 위에 있지 않다는 사실을 이용했는데, R는 윗면에, P와 Q는 아랫면에 있으므로 이는 참이다.)

소문항 (ii)(a)

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 1-p \\ q \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{SR} = \begin{pmatrix} r \\ 1-s \\ 0 \end{pmatrix}.$$

이다. z성분은 이미 같으므로

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{SR} \iff r = 1-p \text{ 그리고 } q = 1-s \iff p + r = 1 \text{ 그리고 } q + s = 1.$$

이다. 무게중심(centroid)은

$$\tfrac{1}{4}(\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}+\overrightarrow{OS}) = \tfrac{1}{4}\begin{pmatrix} p+1+r \\ q+1+s \\ 2 \end{pmatrix},$$

이고, 정육면체의 중심은 $(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})$이다. 셋째 성분은 항상 같으므로, 무게중심이 중심에 있을 필요충분조건은 $p+1+r=2$이고 $q+1+s=2$인 것이며, 이는 앞의 두 조건 $p+r=1$, $q+s=1$과 같다. 따라서 두 명제는 동치이다.

($r=1-p$, $s=1-q$일 때 한 평면 위에 있을 조건 $rq=(1-s)(1-p)$는 $(1-p)q=q(1-p)$가 되어 자동으로 성립한다는 점에 주목하자. 즉 배제되는 배치는 없다.)

소문항 (ii)(b)

(a)에 의해 $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{SR}$로부터 $r=1-p, s=1-q$이다. 두 번째 조건에 대해서는 $s=1-q$일 때의 $\overrightarrow{PS}=(-p,\ s,\ 1)$을 이용하여 길이의 제곱을 비교한다.

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{PQ}|^2=|\overrightarrow{PS}|^2 &\iff (1-p)^2+q^2=p^2+(1-q)^2+1 \\ &\iff 1-2p=2-2q \\ &\iff q=p+\tfrac{1}{2}. \end{aligned}$$

따라서

$$q=p+\tfrac{1}{2}, \qquad r=1-p, \qquad s=\tfrac{1}{2}-p.$$

이다. $q\le 1$이고 $s\ge 0$이므로, 점들이 모서리 위에 있는 것은 $0\le p\le\frac{1}{2}$일 때뿐이다.

생각해 보기 각 PQR를 주는 두 벡터는 무엇인가?

Q에서의 각은 $\overrightarrow{QP}$와 $\overrightarrow{QR}$ (둘 다 Q에서 **멀어지는** 방향) 사이의 각이다. 방금 구한 값을 이용하면

$$\overrightarrow{QP}=\begin{pmatrix} p-1 \\ -p-\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{QR}=\begin{pmatrix} r-1 \\ 1-q \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -p \\ \frac{1}{2}-p \\ 1 \end{pmatrix}.$$

이다. 그러면

$$\begin{aligned} \overrightarrow{QP}\cdot\overrightarrow{QR} &= -p(p-1)-(p+\tfrac{1}{2})(\tfrac{1}{2}-p)=p-p^2-(\tfrac{1}{4}-p^2)=p-\tfrac{1}{4}, \\ |\overrightarrow{QP}|^2 &= (1-p)^2+(p+\tfrac{1}{2})^2=2p^2-p+\tfrac{5}{4}, \\ |\overrightarrow{QR}|^2 &= p^2+(\tfrac{1}{2}-p)^2+1=2p^2-p+\tfrac{5}{4}. \end{aligned}$$

이다. 마름모이므로 당연히 두 길이는 같고, 따라서 분자와 분모에 4를 곱하면

$$\cos PQR=\frac{p-\frac{1}{4}}{2p^2-p+\frac{5}{4}}=\frac{4p-1}{5-4p+8p^2},$$

이다. 이것이 요구한 결과이다.

정사각형. 마름모가 정사각형(square)일 필요충분조건은 각이 직각인 것, 즉 $\cos PQR = 0$인 것이다. 분모 $8p^2 - 4p + 5 = 8(p - \frac{1}{4})^2 + \frac{9}{2}$는 항상 양수이므로, 이는 $4p - 1 = 0$일 때만 일어난다.

$$p = \tfrac{1}{4}, \qquad q = \tfrac{3}{4}, \qquad r = \tfrac{3}{4}, \qquad s = \tfrac{1}{4}.$$

이때 한 변의 길이의 제곱은

$$2 \cdot \tfrac{1}{16} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{5}{4} = \tfrac{9}{8},$$

이므로 각 변의 길이는 $\sqrt{9/8} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$이다. 이를 $\frac{21}{20}$과 비교하기 위해 두 양수의 제곱을 비교하면

$$\left(\tfrac{21}{20}\right)^2 = \tfrac{441}{400} < \tfrac{450}{400} = \tfrac{9}{8}.$$

이다. 따라서 정사각형의 한 변은 $\frac{21}{20}$보다 길다. (실제로 약 1.0607이다.)

검산

- $p = \frac{1}{4}$일 때 네 점은 $(\frac{1}{4}, 0, 0)$, $(1, \frac{3}{4}, 0)$, $(\frac{3}{4}, 1, 1)$, $(0, \frac{1}{4}, 1)$이다. 이들의 평균은 (a)가 예측한 대로 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$이고, 직접 계산하면 $\overrightarrow{QP} \cdot \overrightarrow{QR} = \frac{3}{16} - \frac{3}{16} = 0$이다.
- $p = 0$일 때 공식은 $\cos PQR = -\frac{1}{5}$를 준다. 직접 계산하면 $\overrightarrow{QP} = (-1, -\frac{1}{2}, 0)$, $\overrightarrow{QR} = (0, \frac{1}{2}, 1)$이고, 내적(dot product)은 $-\frac{1}{4}$, 길이의 제곱은 $\frac{5}{4}$이므로 $\cos PQR = -\frac{1}{5}$이다. ✓
- 한 평면 위에 있을 조건의 항등식, (a)의 동치, $\cos PQR$의 공식은 모두 컴퓨터로 많은 무작위 값에 대해 정확한 산술로 확인하였다.

흔한 실수

- Q에서의 각을 구할 때 $\overrightarrow{QP}$와 $\overrightarrow{RQ}$(하나는 들어오고 하나는 나가는 벡터)를 사용하는 것. 이렇게 하면 코사인의 부호가 바뀐다.
- 문자의 순서를 헷갈리는 것. $\overrightarrow{SR}$는 $S - R$가 아니라 $R - S$이다.
- 정확한 비교 없이 계산기 값만으로 $\frac{3\sqrt{2}}{4} > \frac{21}{20}$이라고 주장하는 것. 두 수가 모두 양수이므로 양변을 제곱하면 엄밀성이 유지된다.

STEP 너머

한 평면 위에 있는지를 판정하는 행렬식 판정법은 일반적인 사실의 3차원 경우이다. 즉 벡터들은 그것들로 만든 행렬의 행렬식이 0일 때 정확히 일차종속이다. 정육면체의 평면 단

면 또한 풍부한 예의 원천이다(중심을 지나고 긴 대각선에 수직인 평면은 정육각형(regular hexagon)을 잘라 낸다). 스트랭(Strang)의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수학 입문)는 이러한 기하학적 관점에서 행렬식, 부피, 일차종속을 전개한다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.