풀이

STEP I 2019, 문제 4

순수수학 • 사차방정식의 인수분해

> **STEP I 2019, 4번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2019년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP I 시험지에 있다:
>
> www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

핵심 아이디어

x^3항이 없는 사차식(quartic)의 근을 모두 더하면 0이다. 따라서 네 근을 두 쌍으로 나누면 두 쌍의 합은 서로 부호만 반대이고, 바로 이 때문에 두 이차 인수의 x의 계수가 s와 $-s$가 된다. 이제 계수를 비교(comparing coefficients)하면 세 개의 방정식을 얻고, p와 q를 소거하면 s^2에 대한 삼차방정식이 남는다. 소문항 (i)은 마지막 단계의 무리수(surd) 계산을 돕기 위해 있다.

풀이

소문항 (i)

$m+n\sqrt{2}$를 제곱하면 $m^2+2n^2+2mn\sqrt{2}$이므로 $m^2+2n^2=3$이고 $mn=1$이어야 한다. $m=n=1$로 두면 성립한다.

$$(1+\sqrt{2})^2 = 1+2\sqrt{2}+2 = 3+2\sqrt{2},$$

그리고 $1+\sqrt{2}>0$이므로 이것이 양의 제곱근이다. 따라서 $m=1, n=1$이고

$$\sqrt{3+2\sqrt{2}} = 1+\sqrt{2}.$$

마찬가지로 $(\sqrt{2}-1)^2 = 3-2\sqrt{2}$이므로 $\sqrt{3-2\sqrt{2}} = \sqrt{2}-1$이다. 이 두 결과가 모두 필요하다.

소문항 (ii)

인수분해가 가능한 이유. 네 실근을 a, b, c, d라 하면 $\mathrm{f}(x) = (x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$이다. f에서 x^3의 계수는 $-(a+b+c+d)$이고 이것이 0이므로 $c+d=-(a+b)$이다. 근을

쌍으로 묶으면

$$f(x) = (x^2 - (a+b)x + ab)(x^2 - (c+d)x + cd) = (x^2 + sx + p)(x^2 - sx + q),$$

이고, 여기서 $s = -(a+b)$, $p = ab$, $q = cd$이며, 근이 실수이므로 이들은 모두 실수이다.

세 개의 방정식. 전개하면

$$(x^2 + sx + p)(x^2 - sx + q) = x^4 + (p + q - s^2)x^2 + s(q-p)x + pq.$$

이를 $x^4 - 10x^2 + 12x - 2$와 비교하면

$$\begin{aligned} p + q - s^2 &= -10, \\ s(q-p) &= 12, \\ pq &= -2. \end{aligned}$$

s에 대한 방정식. 두 번째 식에서 $s \neq 0$이므로 s로 나눌 수 있다. 즉 $q - p = 12/s$이다. 첫 번째 식에서 $p + q = s^2 - 10$이다. 이제 항등식(identity) $(p+q)^2 - (q-p)^2 = 4pq = -8$을 이용하면

$$(s^2 - 10)^2 - \frac{144}{s^2} = -8.$$

양변에 s^2(0이 아니다)을 곱하면

$$s^2(s^2 - 10)^2 + 8s^2 - 144 = 0,$$

이 되어 원하는 식을 얻는다.

s^2의 값. $u = s^2$으로 놓고 전개하면

$$u(u-10)^2 + 8u - 144 = u^3 - 20u^2 + 108u - 144.$$

144의 작은 약수들을 대입해 보면 $u = 2$일 때 $8 - 80 + 216 - 144 = 0$이므로 $u - 2$가 인수이고,

$$u^3 - 20u^2 + 108u - 144 = (u-2)(u^2 - 18u + 72) = (u-2)(u-6)(u-12).$$

따라서 가능한 세 값은 $s^2 = 2, 6, 12$이다.

생각해 보기 인수분해는 하나만 있으면 되는데, 왜 s^2의 값이 세 개나 나올까?

네 근을 두 쌍으로 나누는 방법은 세 가지이고, 각 쌍짓기마다 $s^2 = (a+b)^2$인 이차 인수의 쌍이 하나씩 생긴다. 방정식을 푸는 데는 어느 것을 써도 되지만, 가장 작은 값이 가장 깔끔한 무리수를 준다.

$f(x)=0$ **풀기.** $s^2=2$, $s=\sqrt{2}$로 택한다($s=-\sqrt{2}$를 택하면 두 인수의 순서만 바뀐다). 그러면

$$p+q=2-10=-8, \qquad q-p=\frac{12}{\sqrt{2}}=6\sqrt{2},$$

이므로 $p=-4-3\sqrt{2}$, $q=-4+3\sqrt{2}$이다. (확인: $pq=16-18=-2$.) 따라서

$$f(x)=(x^2+\sqrt{2}\,x-4-3\sqrt{2})(x^2-\sqrt{2}\,x-4+3\sqrt{2}).$$

첫 번째 인수의 판별식(discriminant)은 소문항 (i)을 이용하면

$$2+4(4+3\sqrt{2})=18+12\sqrt{2}=6(3+2\sqrt{2})=6(1+\sqrt{2})^2,$$

이므로 그 제곱근은 $\sqrt{6}(1+\sqrt{2})=\sqrt{6}+2\sqrt{3}$이다. 근은

$$x=\frac{-\sqrt{2}\pm(\sqrt{6}+2\sqrt{3})}{2}.$$

두 번째 인수의 판별식은

$$2-4(-4+3\sqrt{2})=18-12\sqrt{2}=6(3-2\sqrt{2})=6(\sqrt{2}-1)^2,$$

이고 그 제곱근은 $\sqrt{6}(\sqrt{2}-1)=2\sqrt{3}-\sqrt{6}$이다($2\sqrt{3}=\sqrt{12}>\sqrt{6}$이므로 양수이다). 근은

$$x=\frac{\sqrt{2}\pm(2\sqrt{3}-\sqrt{6})}{2}.$$

따라서 $f(x)=0$의 네 해는

$$x=\tfrac{1}{2}(-\sqrt{2}+\sqrt{6}+2\sqrt{3}), \qquad x=\tfrac{1}{2}(-\sqrt{2}-\sqrt{6}-2\sqrt{3}),$$
$$x=\tfrac{1}{2}(\sqrt{2}+2\sqrt{3}-\sqrt{6}), \qquad x=\tfrac{1}{2}(\sqrt{2}-2\sqrt{3}+\sqrt{6}).$$

검산

- 근의 근삿값은 약 2.2497, -3.6639, 1.2144, 0.1998이다. x^3항이 없으므로 합이 0이어야 하는데 실제로 그렇고, 곱은 상수항인 약 -2이다.
- $x\approx 0.1998$을 대입하면 $x^4-10x^2+12x-2\approx 0.0016-0.3992+2.3976-2\approx 0$이다.
- f의 부호 변화도 맞아떨어진다. $f(0)=-2$, $f(1)=1$, $f(2)=-2$, $f(3)=25$, $f(-4)=46$이므로 $(-4,0)$, $(0,1)$, $(1,2)$, $(2,3)$에 근이 하나씩 있다.

흔한 실수

- x의 계수가 왜 s와 $-s$인지 설명하지 않는 것. 이는 x^3의 계수가 0이라는 사실, 즉 근의 합이 0이라는 사실에서 나온다.

- s로 나누기 전에 $s \neq 0$임을 밝히지 않는 것.
- 근을 $\sqrt{18 \pm 12\sqrt{2}}$ 꼴로 남겨 두는 것. 문제는 완전히 간단히 할 것을 요구하며, 소문항 (i)이 바로 그것을 위해 있다.

STEP 너머

이것은 사차방정식에 대한 페라리(Ferrari)의 방법을 모습만 바꾼 것이다. s^2에 대한 삼차식은 **분해 삼차식**(resolvent cubic)이고, 그 세 근은 네 근을 쌍으로 묶는 세 가지 방법에 대응한다. 사차방정식은 삼차방정식으로 환원할 수 있는데 일반적인 오차방정식(quintic)은 왜 거듭제곱근(radical)으로 아예 풀 수 없는지는 갈루아(Galois) 이론의 주제이며, 이 이론은 방정식의 가해성(solvability)을 근들의 대칭성과 연결한다. Allenby의 *Rings, Fields and Groups*(환, 체, 군)는 이 이론으로 나아가는 대학 1학년 수준의 좋은 길잡이이다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.