풀이

STEP I 2019, 문제 3

순수수학 • 적분

> **STEP I 2019, 3번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2019년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP I 시험지에 있다:
>
> www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

핵심 아이디어

분모와 분자에 $1-\sin x$를 곱하면 $1+\sin x$가 $1-\sin^2 x=\cos^2 x$로 바뀌고, $\cos x$의 거듭제곱을 분모로 하는 식은 모두 표준적인 조각 $\sec^2 x$, $\sec x\tan x$, $\tan^2 x\sec^2 x$, $\sin x/\cos^4 x$로 나뉜다. 이들은 모두 보자마자 적분할 수 있다. 나머지 두 적분도 모양만 바뀐 같은 기법이다. 두 번째 적분은 $1+\cos x$ 꼴의 적분이 되는데, 치환(substitution) $x=\frac{1}{2}\pi-u$를 하면 첫 번째와 같은 꼴이 된다. 세 번째 적분은 인수 $1-\sin x$를 제곱하여 곱한다.

풀이

첫 번째 적분

$(1+\sin x)(1-\sin x)=1-\sin^2 x=\cos^2 x$이므로

$$\frac{1}{1+\sin x}=\frac{1-\sin x}{\cos^2 x}=\sec^2 x-\sec x\tan x.$$

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\tan x=\sec^2 x$이고 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sec x=\sec x\tan x$임을 알고 있으므로

$$\int\frac{1}{1+\sin x}\,\mathrm{d}x=\tan x-\sec x+C. \qquad (*)$$

$\tan\frac{1}{4}\pi=1$, $\sec\frac{1}{4}\pi=\sqrt{2}$, $\tan 0=0$, $\sec 0=1$을 이용하면

$$\int_0^{\frac{1}{4}\pi}\frac{1}{1+\sin x}\,\mathrm{d}x=(1-\sqrt{2})-(0-1)=2-\sqrt{2}.$$

(적분 구간 전체에서 $\sin x<1$이므로 0을 곱하는 일이 없어서, $1-\sin x$를 곱해도 괜찮다.)

두 번째 적분

분모와 분자에 $\cos x$를 곱하면($[\frac{1}{4}\pi, \frac{1}{3}\pi]$에서 0이 아니다)

$$\frac{1}{1+\sec x} = \frac{\cos x}{\cos x + 1} = 1 - \frac{1}{1+\cos x}.$$

생각해 보기 $\dfrac{1}{1+\cos x}$에 $(*)$를 어떻게 이용할 수 있을까?

$\cos x = \sin(\frac{1}{2}\pi - x)$이므로 $u = \frac{1}{2}\pi - x$로 치환하면 $\mathrm{d}x = -\mathrm{d}u$이다. $x = \frac{1}{4}\pi$일 때 $u = \frac{1}{4}\pi$이고, $x = \frac{1}{3}\pi$일 때 $u = \frac{1}{6}\pi$이다. 따라서

$$\begin{aligned}\int_{\frac{1}{4}\pi}^{\frac{1}{3}\pi} \frac{1}{1+\cos x}\,\mathrm{d}x = \int_{\frac{1}{6}\pi}^{\frac{1}{4}\pi} \frac{1}{1+\sin u}\,\mathrm{d}u &= \Big[\tan u - \sec u\Big]_{\frac{1}{6}\pi}^{\frac{1}{4}\pi} \\ &= (1-\sqrt{2}) - \Big(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{3}}\Big) = 1 - \sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{3}},\end{aligned}$$

여기서 $\tan\frac{1}{6}\pi = 1/\sqrt{3}$과 $\sec\frac{1}{6}\pi = 2/\sqrt{3}$을 이용하였다. 구간의 길이는 $\frac{1}{3}\pi - \frac{1}{4}\pi = \frac{1}{12}\pi$이므로

$$\int_{\frac{1}{4}\pi}^{\frac{1}{3}\pi} \frac{1}{1+\sec x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{12} - \Big(1 - \sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{3}}\Big) = \frac{\pi}{12} + \sqrt{2} - 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

(마찬가지로 $\frac{1}{1+\cos x}$에 $\frac{1-\cos x}{1-\cos x}$를 곱하여 $\operatorname{cosec}^2 x - \cot x \operatorname{cosec} x$를 얻을 수도 있다. 그 부정적분(antiderivative)은 $\operatorname{cosec} x - \cot x = \tan\frac{1}{2}x$이고, $\tan\frac{1}{8}\pi = \sqrt{2} - 1$이므로 같은 답이 나온다.)

세 번째 적분

이번에는 분모와 분자에 $(1-\sin x)^2$을 곱하여 분모를 $\cos^4 x$로 만든다.

$$\frac{1}{(1+\sin x)^2} = \frac{(1-\sin x)^2}{\cos^4 x} = \frac{1+\sin^2 x}{\cos^4 x} - \frac{2\sin x}{\cos^4 x}.$$

첫 번째 조각은 분자의 1을 $1 = \sin^2 x + \cos^2 x$로 바꾸어 쓴다.

$$\frac{1+\sin^2 x}{\cos^4 x} = \frac{\cos^2 x + 2\sin^2 x}{\cos^4 x} = \sec^2 x + 2\tan^2 x \sec^2 x.$$

생각해 보기 $\tan^2 x \sec^2 x$와 $\sin x / \cos^4 x$를 적분하면 무엇이 될까?

둘 다 $f(x)^n f'(x)$ 꼴이다. $f = \tan x$이면 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\tan^3 x = 3\tan^2 x \sec^2 x$이고, $f = \cos x$이면 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\cos x)^{-3} = 3\sin x\,(\cos x)^{-4}$이다. 따라서

$$\int \frac{1}{(1+\sin x)^2}\,\mathrm{d}x = \tan x + \tfrac{2}{3}\tan^3 x - \tfrac{2}{3}\sec^3 x + C.$$

$x = \frac{1}{4}\pi$에서는 $\tan = 1$, $\sec^3 = (\sqrt{2})^3 = 2\sqrt{2}$이므로 $1 + \frac{2}{3} - \frac{4}{3}\sqrt{2}$이다. $x = 0$에서는 $0 + 0 - \frac{2}{3}$이다. 그러므로

$$\int_0^{\frac{1}{4}\pi} \frac{1}{(1+\sin x)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{5}{3} - \frac{4\sqrt{2}}{3} + \frac{2}{3} = \frac{7-4\sqrt{2}}{3}.$$

검산

- 크기: $[0, \frac{1}{4}\pi]$에서 첫 번째 피적분함수(integrand)는 1에서 $2-\sqrt{2} \approx 0.59$로 감소하므로, 적분값은 0.46과 0.79 사이에 있다. $2-\sqrt{2} \approx 0.586$은 이에 맞는다. 마찬가지로 세 번째 피적분함수는 첫 번째 피적분함수의 제곱이므로 적분값이 더 작아야 한다. 실제로 $(7-4\sqrt{2})/3 \approx 0.448$이다.
- 구한 부정적분을 미분해 본다. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\tan x - \sec x) = \frac{1-\sin x}{\cos^2 x} = \frac{1}{1+\sin x}$.
- 심프슨 공식(Simpson's rule)으로 계산하면 세 적분은 각각 0.585786, 0.098663, 0.447715이고, 이는 $2-\sqrt{2}$, $\frac{\pi}{12} + \sqrt{2} - 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\frac{1}{3}(7-4\sqrt{2})$와 소수점 아래 열 자리까지 일치한다.

흔한 실수

- $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sec x$나 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sec^3 x$에서 부호를 틀리는 실수: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\cos x)^{-n} = n\sin x(\cos x)^{-n-1}$이므로 둘 다 양의 부호이다.
- 첫 번째와 세 번째 적분에서 아래끝을 빠뜨리는 실수: $\sec 0 = 1$이지 0이 아니다.
- $u = \frac{1}{2}\pi - x$로 치환한 뒤 적분 구간의 위끝과 아래끝을 잘못 바꾸는 실수: $\mathrm{d}x = -\mathrm{d}u$에서 나오는 음의 부호는 위끝과 아래끝을 다시 증가하는 순서로 되돌리는 데 쓰인다.

STEP 너머

"켤레(conjugate)"를 곱하는 기법은 체계적인 방법의 특수한 경우이다. 치환 $t = \tan\frac{1}{2}x$를 하면 $\sin x$와 $\cos x$의 유리함수(rational function)는 모두 t의 유리함수가 되고, 이는 부분분수(partial fractions)로 적분할 수 있다. ($\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\cos x}$에 대해 얻은 답 $\tan\frac{1}{2}x$가 이를 암시한다.) 대학 1학년 해석학(analysis)에서는 이런 적분이 애초에 존재하는지도 묻는다. 예를 들어 $1+\sin x$가 0이 되는 $x = -\frac{1}{2}\pi$ 근처에서 그렇다. 두 아이디어 모두 Bartle과 Sherbert의 *Introduction to Real Analysis*(실해석학 입문)를 참고하고, 이런 형태의 적분을 더 많이 보려면 Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*(고급 수학 문제)를 참고하라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.