풀이

STEP I 2019, 문제 2

순수수학 • 매개변수 곡선의 접선

> **STEP I 2019, 2번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2019년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP I 시험지에 있다:
>
> www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

핵심 아이디어

매개변수 t에서의 기울기(gradient)가 그냥 t가 되도록 매개변수화(parametrisation)를 골랐기 때문에, 모든 접선(tangent line)이 매우 깔끔하게 나온다. 그러면 두 접선이 만나는 점을 찾는 일은 세제곱의 차(difference of cubes)를 인수분해하는 문제가 되고, 수직(perpendicular) 조건 $pq = -1$을 이용하면 모든 것을 합 $p+q$로 다시 쓸 수 있다. 공통점을 구할 때는 한 매개변수화를 다른 쪽에 대입하면 중근(repeated root)을 가진 다항식이 나오는데, 이 중근은 기하학적으로 무언가를 말해 준다.

풀이

접선

$x = 3t^2, y = 2t^3$이면

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t} = \frac{6t^2}{6t} = t \qquad (t \neq 0).$$

따라서 $(3p^2, 2p^3)$에서의 접선은 기울기가 p이고 방정식은

$$y - 2p^3 = p\,(x - 3p^2) \quad \Longrightarrow \quad y = px - 3p^3 + 2p^3 = px - p^3,$$

이므로 요구한 결과를 얻는다. ($p = 0$일 때 그 점은 원점이며 첨점(cusp)이다. 그곳에서 곡선은 $y = \pm 2(x/3)^{3/2}$이고, 이는 x축 $y = 0$에 접하므로 공식은 여전히 성립한다.)

두 접선이 만나는 점

$p \neq q$일 때, 접선 $y = px - p^3$과 $y = qx - q^3$은

$$(p - q)\,x = p^3 - q^3 = (p - q)(p^2 + pq + q^2).$$

인 곳에서 만난다. $p \neq q$이므로 $p-q$로 나눌 수 있고, $x = p^2+pq+q^2$를 얻으며, 이어서

$$y = px - p^3 = p^3 + p^2q + pq^2 - p^3 = pq(p+q).$$

따라서 두 접선은 다음 점에서 만난다.

$$(p^2+pq+q^2,\ pq(p+q)).$$

두 접선의 기울기는 p와 q이므로, 두 접선이 수직일 필요충분조건은 $pq = -1$이다. $u = p+q$라 두면 $p^2+pq+q^2 = (p+q)^2 - pq = u^2+1$이고 $pq(p+q) = -u$이다. 그러므로 수직인 두 접선은 $(u^2+1,\ -u)$에서 만나며, 이는 요구한 결과이다.

? 생각해 보기 $\widetilde{C}$의 모든 점이 실제로 수직인 접선 쌍에서 나오는가?

그렇다. 임의의 실수 u가 주어지면 $p+q=u$, $pq=-1$이어야 하므로 p와 q는 $z^2-uz-1=0$의 두 근이다. 이 방정식의 판별식(discriminant) u^2+4는 양수이므로 항상 서로 다른 두 실근이 존재한다. 따라서 $\widetilde{C}$는 정확히 C에 수직인 두 접선을 그을 수 있는 점들의 집합이다.

두 곡선 위에 모두 있는 점

매개변수를 소거하면 $\widetilde{C}$는 포물선 $x = y^2+1$이다. C 위의 점 $(3t^2, 2t^3)$이 이 포물선 위에 있을 필요충분조건은

$$3t^2 = 4t^6+1 \quad\Longleftrightarrow\quad 4s^3-3s+1=0, \quad \text{여기서} s = t^2.$$

이다. $s=-1$이 근이므로 다음과 같이 인수분해할 수 있다.

$$4s^3-3s+1 = (s+1)(4s^2-4s+1) = (s+1)(2s-1)^2.$$

$s = t^2 \geq 0$이므로 가능한 것은 $s=\frac{1}{2}$뿐이고, 따라서 $t = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$이다. 그러면 $x = 3t^2 = \frac{3}{2}$, $y = 2t^3 = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$이다. 공통점은

$$\left(\tfrac{3}{2},\ \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right) \quad \text{그리고} \quad \left(\tfrac{3}{2},\ -\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

이다.

? 생각해 보기 중복된 인수 $(2s-1)^2$은 무엇을 말해 주는가?

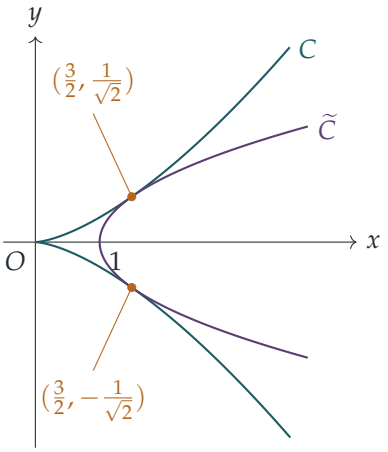
중근은 보통 접함(tangency)을 나타내며, 여기서도 실제로 그렇다. $t = \frac{1}{\sqrt{2}}$에서 C의 기울기는 $t = \frac{1}{\sqrt{2}}$이다. $\widetilde{C}$에서는 $x = y^2+1$로부터 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{2y} = \frac{1}{2/\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$를 얻으며, 이는 같은 값이다. 대칭성에 의해 아래쪽 점에서도 마찬가지이다. 따라서 두 곡선은 두 점 모두에서 서로 접하며 교차하지 않는다.

그래프 그리기

C에서 t를 소거하면 $y^2 = \frac{4}{27}x^3$ $(x \geq 0)$를 얻는다. 이는 반삼차 포물선(semicubical parabola)으로, x축에 대하여 대칭이고 원점에 왼쪽을 향한 첨점이 있다. $\widetilde{C}$는 꼭짓점(vertex)이 $(1,0)$이고 오른쪽으로 열린 포물선 $y^2 = x - 1$이다. 어느 곡선이 다른 곡선의 바깥에 있는지 알아보기 위해, $x \geq 1$에서 두 y^2 값을 비교하자.

$$f(x) = \tfrac{4}{27}x^3 - (x-1), \qquad f'(x) = \tfrac{4}{9}x^2 - 1,$$

따라서 f는 $x \geq 1$에서 $x = \frac{3}{2}$일 때 최솟값을 가지며, 이때 $f(\frac{3}{2}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$이다. 그러므로 $f(x) \geq 0$이고, 등호는 $x = \frac{3}{2}$일 때만 성립한다. 따라서 $\widetilde{C}$는 C의 안쪽(x축에 더 가까운 쪽)에 있으며 두 공통점에서 C에 접한다.



검산

- $p = 1, q = -1$로 잡자(그러면 $pq = -1, u = 0$). 접선은 $y = x - 1$과 $y = -x + 1$이며, 이 둘은 수직이고 $(u^2 + 1, -u)$가 예측하는 대로 $\widetilde{C}$의 꼭짓점 $(1,0)$에서 만난다.
- $p = 2, q = -\frac{1}{2}$로 잡으면 $u = \frac{3}{2}$이다. 접선 $y = 2x - 8$과 $y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{8}$은 $\frac{5}{2}x = \frac{65}{8}$인 곳에서 만나므로 $x = \frac{13}{4} = u^2 + 1, y = -\frac{3}{2} = -u$이다.
- 점 $(1.5, 0.7071)$은 $y^2 = \frac{4}{27}x^3$($\frac{4}{27} \cdot \frac{27}{8} = \frac{1}{2}$이므로)과 $y^2 = x - 1$을 모두 만족한다. 컴퓨터로 확인한 결과 $3t^2 - 4t^6 - 1$은 결코 0보다 커지지 않았으므로, 다른 공통점은 없다.

흔한 실수

- $s = t^2$이 음수일 수 없다는 사실을 잊고 근 $s = -1$을 사용하려고 하는 것.
- 포물선이 공통점에서 C에 접하는 대신 C를 가로지르도록 그리는 것.

STEP 너머

곡선 $\widetilde{C}$는 C의 **직교 접선 궤적**(orthoptic)이다. 즉 C에 수직인 두 접선을 그을 수 있는 점들의 자취이며, 포물선의 경우에는 준선(directrix)이 된다. 곡선을 그 접선들의 족으로 기술하는 관점은 포락선(envelope)과 사영기하학(projective geometry)의 쌍대성(duality)으로 이어진다. Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*(수학 심화 문제집)에 이런 종류의 문제가 더 실려 있다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.