풀이

STEP I 2019, 문제 10

역학 • 포물체 운동

STEP I 2019, 10번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2019년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP I 시험지에 있다:

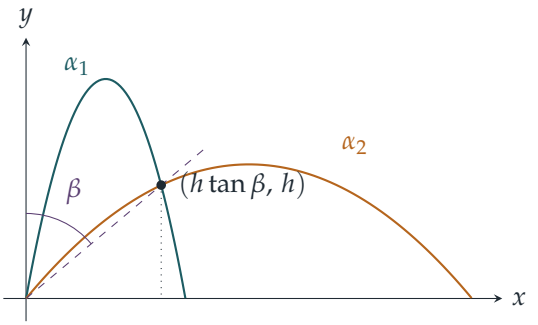
www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

핵심 아이디어

y를 x에 대한 식으로 나타낸 궤적(trajectory)의 방정식을 쓰고, 주어진 고정점을 대입한 다음, $1/\sin^2\alpha = 1 + \cot^2\alpha$를 이용하면 이 식이 $c = \cot\alpha$에 대한 이차방정식(quadratic)이 된다는 것을 알아차린다. 그 다음부터 (i)의 내용은 모두 이차방정식의 대수이다. 근의 합과 곱(sum and product of roots)을 cot의 덧셈정리(addition formula)에 넣으면 $\alpha_1 + \alpha_2$를 얻고, "서로 다른 두 근"은 판별식(discriminant) 조건이다. 소문항 (ii)는 에너지(energy)(또는 $v^2 = u^2 + 2as$)를 이용하는 한 줄짜리 논증이다.

풀이

입자를 공기 저항(air resistance) 없이 중력만 받으며 자유롭게 움직이는 질점(point mass)으로 모형화한다. 각 α는 위쪽 연직(vertical) 방향으로부터 잰 각이므로, 처음 속도의 수평 성분은 $u\sin\alpha$이고 연직 성분은 $u\cos\alpha$이다.



그림은 이 점을 지나는 두 가지 가능한 궤적을 나타낸다($\beta = 50°, k = 8$일 때). 이 점은 O를

지나고 연직 방향과 각 β를 이루는 직선 위에 있다.

소문항 (i)

시각 t에서

$$x = ut\sin\alpha, \qquad y = ut\cos\alpha - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

$0 < \beta < 90^\circ$이므로 이 점에서 $x > 0$이고, 따라서 $\sin\alpha \neq 0$이므로 $t = x/(u\sin\alpha)$를 소거할 수 있다.

$$y = x\cot\alpha - \frac{gx^2}{2u^2\sin^2\alpha} = cx - \frac{gx^2}{2u^2}(1+c^2),$$

여기서 $\csc^2\alpha = 1 + \cot^2\alpha$를 이용하였다. 이제 $x = h\tan\beta$, $y = h$를 대입하고 $h > 0$으로 나누면

$$1 = c\tan\beta - \frac{gh}{2u^2}\tan^2\beta\,(1+c^2) = c\tan\beta - \frac{\tan^2\beta}{k}(1+c^2).$$

양변에 $k\cot^2\beta$를 곱하면 $k\cot^2\beta = ck\cot\beta - 1 - c^2$, 즉

$$c^2 - ck\cot\beta + 1 + k\cot^2\beta = 0, \qquad (*)$$

이 되어 원하는 결과를 얻는다.

(a) 두 값 $c_1 = \cot\alpha_1$과 $c_2 = \cot\alpha_2$는 c에 대한 이차방정식 $(*)$의 두 근이다. (cot은 $(0,\pi)$에서 일대일(one-to-one)이므로 두 값은 서로 다르다.) 따라서 근의 합과 곱에 의하여

$$\cot\alpha_1 + \cot\alpha_2 = k\cot\beta, \qquad \cot\alpha_1\cot\alpha_2 = 1 + k\cot^2\beta.$$

이 중 첫 번째 식이 첫 번째 결과이다. 두 번째 결과를 얻으려면 cot의 덧셈정리를 이용한다.

$$\cot(\alpha_1+\alpha_2) = \frac{\cot\alpha_1\cot\alpha_2 - 1}{\cot\alpha_1 + \cot\alpha_2} = \frac{k\cot^2\beta}{k\cot\beta} = \cot\beta.$$

? **생각해 보기** $\cot(\alpha_1+\alpha_2) = \cot\beta$이면 정말로 $\alpha_1+\alpha_2 = \beta$일 수밖에 없는가?

그것만으로는 아니다. cot은 주기(period)가 180°이므로 $\alpha_1+\alpha_2$의 범위도 확정해야 한다. 여기서는 합 $k\cot\beta$와 곱 $1+k\cot^2\beta$가 모두 양수이므로($k>0$이고 $\cot\beta>0$이므로) 두 근 c_1, c_2는 모두 양수이다. 따라서 두 각은 모두 예각(acute)이고, $0 < \alpha_1+\alpha_2 < 180^\circ$이며, 이 구간에서 cot은 일대일이다. β도 이 구간에 속하므로 $\alpha_1+\alpha_2 = \beta$이다.

(b) c의 값이 서로 다른 두 실수이려면 $(*)$의 판별식이 양수여야 한다.

$$k^2\cot^2\beta - 4(1+k\cot^2\beta) > 0.$$

양변에 $\tan^2\beta > 0$을 곱하면

$$k^2 - 4k - 4\tan^2\beta > 0.$$

좌변의 k에 대한 이차식의 근은 $k = 2 \pm \sqrt{4 + 4\tan^2\beta} = 2 \pm 2\sec\beta$이다($1 + \tan^2\beta = \sec^2\beta$와 $\sec\beta > 0$을 이용). 따라서 이 부등식은 $k < 2 - 2\sec\beta$ 또는 $k > 2 + 2\sec\beta$일 때, 그리고 그때에만 성립한다. 그런데 $\sec\beta > 1$이므로 $2 - 2\sec\beta < 0 < k$이고, 첫 번째 경우는 불가능하다. 그러므로

$$k > 2(1 + \sec\beta).$$

소문항 (ii)

입자는 높이 $h > 0$까지 올라가야 하므로 처음 연직 속도 $u\cos\alpha$는 양수이다. 연직 방향의 운동은 일정한 가속도 $-g$를 가지며, 최고점에서 연직 속도는 0이므로 $v^2 = u^2 + 2as$에 의하여 최대 높이는

$$H = \frac{u^2\cos^2\alpha}{2g}.$$

입자는 높이 h인 점을 지나므로 $H \geq h$이다.

$$\frac{u^2\cos^2\alpha}{2g} \geq h \quad \Longrightarrow \quad \frac{2u^2}{gh}\cos^2\alpha \geq 4 \quad \Longrightarrow \quad k \geq 4\sec^2\alpha,$$

여기서 $4/(gh) > 0$을 곱한 다음 $\cos^2\alpha > 0$으로 나누었다. 등호는 점 $(h\tan\beta, h)$가 궤적의 최고점일 때, 그리고 그때에만 성립한다.

검산

- $\beta = 50°$, $k = 8$로 놓자. 그러면 $2(1 + \sec 50°) \approx 5.11 < 8$이므로 두 각이 존재한다. $(*)$를 풀면 $\alpha_1 \approx 10.29°$와 $\alpha_2 \approx 39.71°$를 얻고, 그 합은 $50°$이다. 운동을 수치적으로 한 단계씩 진행시켜 보면 두 궤적 모두 $x = h\tan\beta$에서 높이 $1.0000\,h$에 도달한다.
- 이 각들에 대하여 $k\cos^2\alpha \approx 7.74$와 4.73이고, (ii)에서 요구하는 대로 둘 다 4 이상이다.
- 수천 개의 임의의 β, h, k에 대하여 컴퓨터로 확인한 결과, $(*)$가 서로 다른 두 근을 가지는 것은 정확히 $k > 2(1 + \sec\beta)$일 때이고, 매번 $\alpha_1 + \alpha_2 = \beta$였다.
- 단위: $u^2/(gh)$는 무차원(dimensionless)이며, k도 당연히 그래야 한다.

흔한 실수

- 습관적으로 α를 수평 방향에서 재는 것. 여기서 수평 성분은 $u\cos\alpha$가 아니라 $u\sin\alpha$이다.
- 두 각이 모두 예각임을 보이지 않고 $\cot(\alpha_1 + \alpha_2) = \cot\beta$로부터 $\alpha_1 + \alpha_2 = \beta$라고 결론짓는 것.
- (b)에서 음수인 근 $k < 2 - 2\sec\beta$를 남겨 두는 것.

STEP 너머

$\alpha_1 + \alpha_2 = \beta$라는 결과는 두 발사 방향이 연직 방향과 목표점까지의 직선이 이루는 각의 이등분선(bisector)에 대하여 대칭임을 말해 준다. 이는 "안전 포물선(parabola of safety)"에 관한 고전적인 사실이다. 안전 포물선은 속력이 u인 모든 궤적의 포락선(envelope)으로, 두 근이 하나로 합쳐지는 경계의 경우 $k = 2(1 + \sec\beta)$에 해당한다. 곡선족의 포락선은 미적분과 기하를 잇는 대학 1학년 수준의 멋진 주제이다. 이러한 분위기의 역학을 더 보고 싶다면 Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)를 참고하라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.