풀이

STEP I 2019, 문제 1

순수수학 • 삼각함수의 최적화

> **STEP I 2019, 1번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2019년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP I 시험지에 있다:
>
> www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

핵심 아이디어

모든 것은 직선이 좌표축과 만나는 위치에서 출발한다. 둘레(perimeter)의 경우, 고정점 $P = (1, k)$가 빗변(hypotenuse) XY를 두 조각으로 나누고, 각 조각은 한 변의 길이를 알고 있는 작은 직각삼각형의 빗변이 되므로 제곱근을 전개할 필요가 전혀 없다. 최솟값(minimum)의 경우, 넓이는 곱이 일정한 두 항의 합이고(산술-기하 평균 부등식을 쓸 상황이다), 둘레의 도함수(derivative)는 $\cos^2\theta = (1-\sin\theta)(1+\sin\theta)$를 이용하면 놀랍도록 간단해진다.

풀이

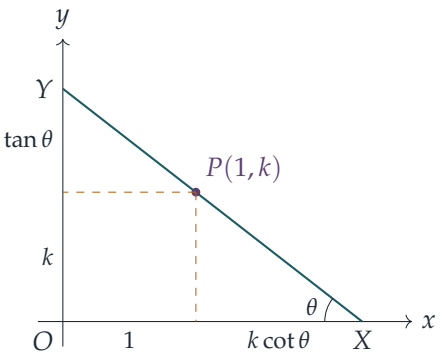
$(1, k)$를 지나고 기울기(gradient)가 $-\tan\theta$인 직선은

$$y - k = -\tan\theta\,(x-1).$$

이다. $y = 0$을 대입하면 $x - 1 = k\cot\theta$이고, $x = 0$을 대입하면 $y = k + \tan\theta$이므로

$$X = (1 + k\cot\theta,\ 0), \qquad Y = (0,\ k + \tan\theta).$$

이다. $k > 0$이고 $0 < \theta < \frac{1}{2}\pi$이므로 두 절편(intercept)은 모두 양수이다. 따라서 OXY는 제1사분면에 놓인 진짜 직각삼각형이고, $P = (1, k)$는 그 빗변 위에 있다.



소문항 (i)

삼각형은 O에서 직각이므로

$$A = \tfrac{1}{2}(1 + k\cot\theta)(k + \tan\theta) = \tfrac{1}{2}\big(k + \tan\theta + k^2\cot\theta + k\big)$$
$$= k + \tfrac{1}{2}\big(\tan\theta + k^2\cot\theta\big),$$

이다. 여기서 $\cot\theta\tan\theta = 1$을 이용하였다.

최솟값을 구하자. $\tan\theta$와 $k^2\cot\theta$는 모두 양수이고 그 곱은 상수 k^2이다. 산술-기하 평균 부등식(AM–GM inequality)에 의해

$$\tan\theta + k^2\cot\theta \geq 2\sqrt{\tan\theta \cdot k^2\cot\theta} = 2k,$$

이고, 등호는 정확히 $\tan\theta = k^2\cot\theta$, 즉 $\tan\theta = k$일 때 성립한다($k > 0$이므로 이 값은 범위 안의 어떤 θ에서 실제로 얻어진다). 따라서 $A \geq k + k = 2k$이고,

$$A_{\min} = 2k.$$

이다. (미분해도 같은 결과를 얻는다. $\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}\theta} = \frac{1}{2}(\sec^2\theta - k^2\operatorname{cosec}^2\theta) = 0$이 되는 것은 $\tan^2\theta = k^2$일 때이다.) 최소일 때 $X = (2, 0)$, $Y = (0, 2k)$이므로 P는 XY의 중점이다.

소문항 (ii)

두 직각변은 $OX = 1 + k\cot\theta$와 $OY = k + \tan\theta$이다. 빗변은 그림에서처럼 P에서 나누어 생각한다.

- P에서 Y까지: 수평 거리가 1이고 직선이 수평선과 이루는 각이 θ이므로 $PY = 1/\cos\theta = \sec\theta$이다.
- P에서 X까지: 수직 거리가 k이므로 $PX = k/\sin\theta = k\operatorname{cosec}\theta$이다.

네 길이를 더하면

$$L = 1 + \tan\theta + \sec\theta + k\big(1 + \cot\theta + \operatorname{cosec}\theta\big),$$

이 되어 원하는 결과를 얻는다.

생각해 보기 도함수에는 $\sec^2\theta + \sec\theta\tan\theta$가 들어 있다. 이것을 0으로 놓기 전에 훨씬 간단하게 만드는 방법이 있을까?

있다. 항별로 미분하면

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}\theta} = \sec^2\theta + \sec\theta\tan\theta - k\left(\operatorname{cosec}^2\theta + \operatorname{cosec}\theta\cot\theta\right) = \frac{1+\sin\theta}{\cos^2\theta} - k\,\frac{1+\cos\theta}{\sin^2\theta}.$$

이다. 그런데 $\cos^2\theta = (1-\sin\theta)(1+\sin\theta)$이고 $\sin^2\theta = (1-\cos\theta)(1+\cos\theta)$이며, $1+\sin\theta, 1+\cos\theta$는 0이 아니므로 약분할 수 있다.

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}\theta} = \frac{1}{1-\sin\theta} - \frac{k}{1-\cos\theta}.$$

이것은 정확히 $1-\cos\theta = k(1-\sin\theta)$일 때 0이다. 따라서 최솟값은

$$\frac{1-\cos\alpha}{1-\sin\alpha} = k,$$

를 만족하는 $\theta = \alpha$에서 나타나며, 이것이 보여야 할 내용이었다. (사실 이 정류점(stationary point)은 유일하며 최소점이다. $(0, \frac{1}{2}\pi)$에서 θ가 증가하면 $\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}\theta}$의 첫째 항은 증가하고 둘째 항은 감소하므로, $\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}\theta}$는 증가함수이고 음에서 양으로 단 한 번 부호가 바뀐다.)

생각해 보기 최솟값에서 k를 어떻게 없앨 수 있을까?

L의 항들을 공통분모로 묶는다.

$$1+\tan\alpha+\sec\alpha = \frac{1+\sin\alpha+\cos\alpha}{\cos\alpha}, \qquad 1+\cot\alpha+\operatorname{cosec}\alpha = \frac{1+\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

$s = \sin\alpha, c = \cos\alpha, k = \dfrac{1-c}{1-s}$로 쓰면 둘째 부분은

$$k\,\frac{1+s+c}{s} = \frac{(1+s+c)(1-c)}{s(1-s)} = \frac{1+s-sc-c^2}{s(1-s)} = \frac{s^2+s-sc}{s(1-s)} = \frac{1+s-c}{1-s},$$

이 된다. 여기서 $1-c^2 = s^2$을 이용하였다. 따라서

$$\begin{aligned} L_{\min} = \frac{1+s+c}{c} + \frac{1+s-c}{1-s} &= \frac{(1+s+c)(1-s)+c(1+s-c)}{c(1-s)} \\ &= \frac{1-s^2+c-sc+c+sc-c^2}{c(1-s)} \\ &= \frac{2c}{c(1-s)}, \end{aligned}$$

이다. $1-s^2-c^2 = 0$이기 때문이다. 그러므로

$$L_{\min} = \frac{2}{1-\sin\alpha}.$$

이다.

검산

$k = 1$로 놓자. 그러면 $\tan\theta = 1$에서 $X = (2,0)$, $Y = (0,2)$이고 $A = 2 = 2k$로 예측과 같다. 둘레 조건 $(1-\cos\alpha)/(1-\sin\alpha) = 1$에서 $\alpha = \frac{1}{4}\pi$이고, $2/(1-\frac{1}{\sqrt{2}}) = 4+2\sqrt{2} \approx 6.828$인데, 이는 꼭짓점이 $(0,0)$, $(2,0)$, $(0,2)$인 삼각형의 둘레 $2+2+2\sqrt{2}$와 정확히 일치한다. 다른 여러 k 값에 대해서도 θ에 대한 컴퓨터 탐색으로 두 최솟값과 둘레가 최소가 되는 위치를 확인하였다.

흔한 실수

- 빗변을 P에서 나누지 않고 $\sqrt{(1+k\cot\theta)^2+(k+\tan\theta)^2}$를 전개하는 것.
- 정리하지 않은 도함수를 0으로 놓고 헤매는 것. 먼저 $1+\sin\theta$와 $1+\cos\theta$를 약분하라.
- 최종 답에 k를 남겨 두는 것. 문제는 최솟값을 α만으로 나타내기를 요구한다.

STEP 너머

이 깔끔한 답에는 기하학적 설명이 있다. P를 지나면서 둘레를 최소로 하는 직선은 두 좌표축에 모두 접하는 원(OXY의 방접원(excircle))에 P에서 접하는 직선이며, 이때 둘레는 O에서 그 원까지의 접선 길이의 두 배가 된다. 이 원은 P를 지나고 반지름이 r인 원으로, $r = 1/(1-\sin\alpha)$이다. "직선이 P를 지난다"와 같은 제약 조건이 붙은 최적화 문제는 대학 1학년 미적분학 과목에서 라그랑주 승수(Lagrange multipliers)를 배우는 출발점이 된다. 이런 흐름의 문제를 더 많이 보려면 Siklos, *Advanced Problems in Mathematics*(고급 수학 문제집)를 참고하라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.