풀이

STEP III 2018, 문제 9

역학 • 충돌과 점화식

> **STEP III 2018, 9번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/18-s3-q9

핵심 아이디어

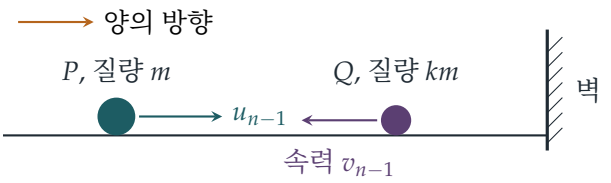
P와 Q 사이의 각 충돌에서는 충돌 전후의 속도를 잇는 일차방정식이 두 개 나온다. 하나는 운동량 보존(conservation of momentum)에서, 다른 하나는 뉴턴의 반발 법칙(Newton's law of restitution)에서 얻는다. 벽은 Q의 속도 방향을 뒤집을 뿐이므로, 한 충돌 직전의 상태는 바로 앞 충돌 직후의 상태로 정해진다. 이로부터 u_n과 v_n에 대한 일계 점화식(first-order recurrence) 한 쌍을 얻고, v를 소거하면 u_n에 대한 이계 점화식(second-order recurrence) 하나만 남는다. 그러면 소문항 (ii)는 선형 점화식의 해를 처음 두 항에 맞추는 익숙한 작업이 된다.

풀이

P와 Q를 매끄러운 바닥 위에서 한 직선을 따라 움직이는 입자로 모형화한다. 따라서 충돌과 충돌 사이에는 수평 방향의 힘이 작용하지 않고, 각 입자는 일정한 속도를 유지한다. 풀이 전체에서 벽을 향하는 방향을 양의 방향으로 잡는다.

충돌과 충돌 사이에 일어나는 일. n번째 충돌 뒤 Q의 속도는 v_n이다(다음에는 벽과 충돌하므로 벽을 향하는 방향이다). 벽과의 충돌은 완전 탄성 충돌(perfectly elastic collision)이므로 Q는 속도 $-v_n$으로 되돌아오고, P의 속도는 여전히 u_n이다. 따라서 $n+1$번째 충돌 직전의 속도는 u_n(P의 속도)과 $-v_n$(Q의 속도)이다.

v_0를 올바르게 해석하면 첫 번째 충돌에도 이 설명이 그대로 성립한다. 첫 충돌 전에 Q는 속력 v_0로 벽에서 멀어지므로 그 속도는 $-v_0$이고, 이는 위의 형태에서 $n=0$인 경우와 정확히 같다.



소문항 (i)

n번째 충돌($n \geq 1$)에 운동량 보존을 적용하면 (양변을 m으로 나누어) 다음을 얻는다.

$$u_{n-1} - kv_{n-1} = u_n + kv_n. \tag{1}$$

접근 속력(speed of approach)은 $u_{n-1} - (-v_{n-1}) = u_{n-1} + v_{n-1}$이다. 충돌 후에는 벽에 더 가까이 있는 Q가 P보다 빠르게 벽 쪽으로 움직이므로, 분리 속력(speed of separation)은 $v_n - u_n$이다. 뉴턴의 반발 법칙에 의해

$$v_n - u_n = e\,(u_{n-1} + v_{n-1}). \tag{2}$$

(2)에서 얻은 v_n을 (1)에 대입하면

$$u_{n-1} - kv_{n-1} = (1+k)u_n + ke\,(u_{n-1} + v_{n-1}),$$

이므로

$$k(1+e)\,v_{n-1} = (1-ke)\,u_{n-1} - (1+k)\,u_n \qquad (n \geq 1). \tag{3}$$

이 식은 각 v를 연속한 두 u로 나타내며, 이것이 바로 v를 소거하는 데 필요한 것이다.

생각해 보기 식 (3)은 v_{n-1}을 없애 주지만, (2)에는 v_n도 들어 있다. 이것은 어떻게 처리할까?

식 (3)은 모든 $n \geq 1$에 대해 성립하므로, $n+1$을 n 자리에 넣어 써도 된다.

$$k(1+e)\,v_n = (1-ke)\,u_n - (1+k)\,u_{n+1}.$$

이제 (2)에 $k(1+e)$를 곱하고, $k(1+e)v_n$과 $k(1+e)v_{n-1}$을 모두 이 두 식으로 바꾸면

$$(1-ke)u_n - (1+k)u_{n+1} - k(1+e)u_n = ke(1+e)\,u_{n-1} + e[(1-ke)u_{n-1} - (1+k)u_n].$$

항을 정리한다. 우변에서 u_{n-1}의 계수는 $ke + ke^2 + e - ke^2 = e(1+k)$이다. u_n 항을 좌변으로 옮기면 그 계수는

$$1 - ke - k - ke + e + ke = 1 - k + e - ke = (1+e)(1-k).$$

따라서

$$(1+k)u_{n+1} - (1-k)(1+e)u_n + e(1+k)u_{n-1} = 0 \qquad (n \geq 1),$$

이고, n을 $n-1$로 바꾸면 $(*)$를 $n \geq 2$에 대해 얻는다. 이것이 보여야 할 식이다.

소문항 (ii)

$e = \frac{1}{2}, k = \frac{1}{34}$일 때 $(*)$에 68을 곱하면

$$70u_n - 99u_{n-1} + 35u_{n-2} = 0,$$

이고, 그 특성방정식(auxiliary equation) $70t^2 - 99t + 35 = (10t - 7)(7t - 5) = 0$의 근은 $\frac{7}{10}$과 $\frac{5}{7}$이므로 주어진 꼴과 일치한다.

A와 B를 정하려면 조건이 두 개 필요하므로 처음 두 항이 있어야 한다. u_0는 이미 알고 있다. u_1을 구하기 위해 (3)에 $n = 1$을 대입하면

$$(1 + k)u_1 = (1 - ke)u_0 - k(1 + e)v_0,$$

$$\text{따라서} \quad \tfrac{35}{34}u_1 = \tfrac{67}{68}u_0 - \tfrac{3}{68}v_0, \quad \text{즉} \quad u_1 = \frac{67u_0 - 3v_0}{70}.$$

주어진 꼴에 $n = 0$과 $n = 1$을 대입하면

$$A + B = u_0, \qquad \tfrac{7}{10}A + \tfrac{5}{7}B = \frac{67u_0 - 3v_0}{70}.$$

두 번째 식에 70을 곱하면 $49A + 50B = 67u_0 - 3v_0$이다. 여기서 첫 번째 식의 49배를 빼면

$$B = 18u_0 - 3v_0, \qquad A = u_0 - B = 3v_0 - 17u_0.$$

충분히 큰 n에서 u_n의 부호. $\frac{5}{7} > \frac{7}{10}$이므로($50 > 49$이기 때문이다) B 항이 지배적이다. 정확히 쓰면

$$u_n = \left(\tfrac{5}{7}\right)^n \left[B + A\left(\tfrac{49}{50}\right)^n\right],$$

이고 $\left(\frac{49}{50}\right)^n \to 0$이므로 대괄호 안의 값은 B로 수렴(converge)한다. $0 < 6u_0 < v_0$이면 $B = 3(6u_0 - v_0) < 0$이므로, 충분히 큰 모든 n에 대해 대괄호 안의 값은 음수이다. $\left(\frac{5}{7}\right)^n > 0$이므로 큰 n에서 u_n은 음수이고, 이것이 보여야 할 내용이다. (구체적으로, $|A|(\frac{49}{50})^n < |B|$가 되는 순간부터 대괄호 안의 값은 음수이다.)

물리적으로 보면, P는 결국 벽에서 멀어지는 쪽으로 튕겨 나간다. Q는 P에 대한 초기 상대 속력이 충분히 커서, Q가 훨씬 가벼운데도 계속 그것을 뒤로 밀어내기 때문이다.

검산

- $e = 1, k = 1$(질량이 같고 완전 탄성)로 놓으면 $(*)$는 $2u_n + 2u_{n-2} = 0$이 되므로 $u_n = -u_{n-2}$이다. 실제로 질량이 같은 두 물체가 탄성 충돌하면 속도를 서로 맞바꾸므로 $u_1 = -v_0, u_2 = -v_1$이다. 그런데 Q는 P의 이전 속도 u_0를 벽까지 가져갔다가 되돌아오므로 $u_2 = -u_0$이다.

- $n = 0$일 때 공식은 $A + B = u_0$를 주고, $n = 1$일 때는

$$\tfrac{7}{10}(3v_0 - 17u_0) + \tfrac{5}{7}(18u_0 - 3v_0) = \tfrac{1}{70}(67u_0 - 3v_0),$$

  를 주므로 올바르다.

- $u_0 = 1$, $v_0 = 7$이면 $A = 4$, $B = -3$이다. 충돌을 하나씩 따라가며 계산하면 공식이 정확히 맞음을 확인할 수 있고, u_n은 $n = 15$에서 처음으로 음수가 되며 이때 $u_{15} \approx -0.00029$이다.

흔한 실수

- 충돌 직전 Q의 속도는 $-v_{n-1}$이지 v_{n-1}이 아니라는 점을 잊는 것. 벽이 속도의 방향을 뒤집는다.
- 반발 법칙 식에서 분리 속력의 부호를 틀리는 것. 충돌 후 Q는 양의 방향으로 P보다 앞에 있으므로 분리 속력은 $v_n - u_n$이다.
- $u_1 = \frac{7}{10}A + \frac{5}{7}B$를 쓰면서 정작 u_1을 충돌 방정식에서 구하지 않는 것. $(*)$만으로는 그 값을 얻을 수 없다.

STEP 너머

식 (1)과 (2)의 쌍은 상태 (u_{n-1}, v_{n-1})을 (u_n, v_n)으로 보내는 선형사상(linear map)이므로, 전체 운동은 2×2 행렬(matrix)을 거듭 곱하는 것이다. 근 $\frac{7}{10}$과 $\frac{5}{7}$은 이 행렬의 고윳값(eigenvalue)이고, 장기적인 거동은 가장 큰 고윳값이 좌우한다. 이것이 선형 동역학계(linear dynamical systems)와 차분방정식(difference equations) 이론의 출발점이다. 충돌 역학에 대해 더 알고 싶다면 Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)를, 행렬의 관점에 대해서는 Strang의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수 입문)를 참고하라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.