풀이

STEP III 2018, 문제 8

순수수학 • 소수 부분의 적분

> **STEP III 2018, 8번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/18-s3-q8

핵심 아이디어

피적분함수(integrand)에서 다루기 까다로운 부분은 x^{-1}이므로 $y = 1/x$로 치환(substitution)한다. 그러면 $[0,1]$이 $[1,\infty)$로 옮겨지는데, 이 구간은 자연스럽게 길이가 1인 구간들로 나뉜다. f의 주기(period)가 1이면 각 단위 구간을 $[0,1]$로 다시 옮길 수 있고, 남는 유리식 인수들은 연쇄적으로 소거되는 합(telescoping sum)을 이룬다. 그러면 소문항 (ii)는 $\{x\}$와 $\{2x\}$가 모두 주기 1을 가진다는 점만 알아차리면 된다.

풀이

소문항 (i)

$x = 1/y$로 놓으면 $\mathrm{d}x = -\frac{1}{y^2}\,\mathrm{d}y$이고, x가 0에서 1까지 변할 때 y는 ∞에서 1까지 줄어든다. 또 $1 + x = \frac{y+1}{y}$이므로

$$I = \int_{\infty}^{1} \frac{\mathrm{f}(y)}{(y+1)/y}\left(-\frac{1}{y^2}\right)\mathrm{d}y = \int_{1}^{\infty} \frac{\mathrm{f}(y)}{y(1+y)}\,\mathrm{d}y.$$

$[1,\infty)$를 $n = 1, 2, 3, \ldots$에 대한 구간 $[n, n+1]$들로 나누면

$$I = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{n}^{n+1} \frac{\mathrm{f}(y)}{y(1+y)}\,\mathrm{d}y,$$

이 되어 요구한 결과를 얻는다.

이제 모든 x에 대하여 $\mathrm{f}(x) = \mathrm{f}(x+1)$이라고 하자. 그러면 모든 정수 n에 대하여 $\mathrm{f}(x+n) = \mathrm{f}(x)$이다. n번째 적분에서 $y = x + n$으로 놓으면 x는 $[0,1]$ 위를 움직이고

$$\int_{n}^{n+1} \frac{\mathrm{f}(y)}{y(1+y)}\,\mathrm{d}y = \int_{0}^{1} \frac{\mathrm{f}(x)}{(x+n)(x+n+1)}\,\mathrm{d}x.$$

? 생각해 보기 이런 적분을 무한히 많이 더하려면 어떻게 해야 할까?

모든 적분이 같은 $f(x)$와 같은 적분 구간을 가지므로, (문제에서 지시한 대로 수렴(convergence) 문제는 무시하고) 합과 적분의 순서를 바꾸어 유리식 인수들을 먼저 더할 수 있다. 부분분수(partial fractions)로 분해하면

$$\frac{1}{(x+n)(x+n+1)} = \frac{1}{x+n} - \frac{1}{x+n+1},$$

이므로 합이 연쇄적으로 소거된다. 즉 고정된 $x \in [0,1]$에 대하여

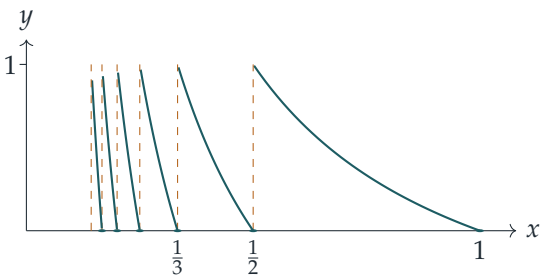
$$\sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{x+n} - \frac{1}{x+n+1} \right) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+N+1} \longrightarrow \frac{1}{1+x} \quad \text{단, } N \to \infty.$$

따라서

$$I = \int_0^1 f(x) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+n)(x+n+1)} \, dx = \int_0^1 \frac{f(x)}{1+x} \, dx,$$

이고, 이것이 원하던 결과이다.

소문항 (ii)



위의 $\{x^{-1}\}$의 그래프를 보면 직접 계산하는 방법이 왜 가망이 없는지 알 수 있다. 각 구간 $(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$에서 이 함수는 $\frac{1}{x} - n$과 같고, 이런 조각이 0 쪽으로 무한히 많이 몰려 있다. 소문항 (i)을 이용하면 이 모든 어려움을 피할 수 있다.

첫 번째 적분. $f(x) = \{x\}$로 놓는다. x에 1을 더하면 $\lfloor x \rfloor$에도 1이 더해지므로 $\{x+1\} = \{x\}$이고, f는 주기 1을 가진다. $[0,1)$에서 $\{x\} = x$이다(한 점 $x = 1$에서의 값은 적분에 영향을 주지 않는다). 따라서 소문항 (i)에 의하여

$$\int_0^1 \frac{\{x^{-1}\}}{1+x} \, dx = \int_0^1 \frac{x}{1+x} \, dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+x} \right) dx = 1 - \ln 2.$$

두 번째 적분. $f(x) = \{2x\}$로 놓으면 필요한 대로 $f(x^{-1}) = \{2x^{-1}\}$이다.

생각해 보기 함수 $\{2x\}$의 주기는 $\frac{1}{2}$이다. 그래도 소문항 (i)을 쓸 수 있을까?

쓸 수 있다. $\{2(x+1)\} = \{2x+2\} = \{2x\}$이므로, 주기가 $\frac{1}{2}$인 함수는 주기 1도 가진다. 따라서 소문항 (i)을 적용할 수 있다. $[0, \frac{1}{2})$에서는 $2x \in [0,1)$이므로 $\{2x\} = 2x$이고, $[\frac{1}{2}, 1)$에서는 $2x \in [1,2)$이므로 $\{2x\} = 2x - 1$이다. 그러므로

$$\int_0^1 \frac{\{2x^{-1}\}}{1+x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{1/2} \frac{2x}{1+x}\,\mathrm{d}x + \int_{1/2}^1 \frac{2x-1}{1+x}\,\mathrm{d}x.$$

$\frac{2x}{1+x} = 2 - \frac{2}{1+x}$, $\frac{2x-1}{1+x} = 2 - \frac{3}{1+x}$로 쓰면

$$\int_0^{1/2} \frac{2x}{1+x}\,\mathrm{d}x = 1 - 2\ln\tfrac{3}{2},$$
$$\int_{1/2}^1 \frac{2x-1}{1+x}\,\mathrm{d}x = 1 - 3\ln\frac{2}{3/2} = 1 - 3\ln\tfrac{4}{3}.$$

두 식을 더하고 로그를 정리하면

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\{2x^{-1}\}}{1+x}\,\mathrm{d}x &= 2 - 2\ln 3 + 2\ln 2 - 6\ln 2 + 3\ln 3 \\ &= 2 + \ln 3 - 4\ln 2 = 2 + \ln\tfrac{3}{16}.\end{aligned}$$

검산

- $0 \le \{\cdot\} < 1$이므로 두 답은 모두 0과 $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x} = \ln 2 \approx 0.693$ 사이에 있어야 한다. 구한 값은 $1 - \ln 2 \approx 0.3069$와 $2 + \ln\frac{3}{16} \approx 0.3260$으로 타당하다. 소수 부분(fractional part)의 평균은 대략 $\frac{1}{2}$이므로 답은 0.693의 절반 정도가 되어야 한다.
- 컴퓨터로 조각 $(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$(두 번째 적분에서는 그 절반 조각)들 위의 적분을 수천 개 이상 더하면 0.306853과 0.326024를 얻으며, 두 답과 일치한다.

흔한 실수

- $y = 1/x$로 치환한 뒤 적분 구간의 위끝과 아래끝을 거꾸로 잡거나 음의 부호를 빠뜨리는 실수. $\mathrm{d}x$에서 나오는 음의 부호와 뒤바뀐 적분 구간이 서로 상쇄된다.
- $[0,1]$ 전체에서 $\{2x\} = 2x$라고 가정하는 실수. 이 함수는 $x = \frac{1}{2}$에서 1만큼 떨어진다.
- 소문항 (i)을 쓰려면 주기가 정확히 1이어야 한다고 생각하는 실수. (양의 정수 k에 대하여) 주기가 $\frac{1}{k}$인 함수는 주기 1도 가진다.

STEP 너머

여기서는 아무 언급 없이 무한급수와 적분의 순서를 바꾸었는데, 대학에서는 바로 이런 단계에 정당화가 필요하다. 단조 수렴 정리(monotone convergence theorem)와 지배 수렴 정리(dominated convergence theorem) 같은 정리들이 언제 그렇게 해도 안전한지를 알려 준다(여기서는 $f \geq 0$이면 모든 항이 음이 아니므로 쉬운 경우에 해당한다). 같은 치환 아이디어로 소수 부분에 관한 유명한 적분들을 얻을 수 있는데, 예를 들어 $\int_0^1 \{1/x\}\,\mathrm{d}x = 1 - \gamma$이다. 여기서 γ는 오일러(Euler) 상수(Euler's constant)이다. 극한, 급수, 적분을 엄밀하게 다루는 방법은 Abbott, *Understanding Analysis*(해석학의 이해)를 참고하라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.