풀이

STEP III 2018, 문제 7

순수수학 • 드무아브르 정리와 급수

STEP III 2018, 7번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/18-s3-q7

이 문제는 *Beyond STEP*의 2.4 절 $\pi^2/6$에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch02/basel.html

핵심 아이디어

식 $\cot\theta + \mathrm{i}$는 사실 $(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)/\sin\theta$를 변장한 것이므로, 드무아브르 정리(De Moivre's theorem)를 쓰면 그 거듭제곱이 배각으로 바뀐다. 같은 거듭제곱을 이항정리(binomial theorem)로 전개하면 $\cot^2\theta$에 대한 다항식(polynomial)을 얻고, 그 근(root)은 $\sin(2n+1)\theta$가 0이 되는 곳에서 바로 읽어 낼 수 있다. 그러면 비에트 공식(Vieta's formula)이 근의 합을 공짜로 알려 주고, $1/\theta^2$을 $\cot^2\theta$와 $1+\cot^2\theta$ 사이에 끼워 넣으면 바젤 합(Basel sum)이 같은 극한(limit)으로 수렴하는 두 경계 사이에 갇힌다.

풀이

소문항 (i)

$\sin\theta \neq 0$이므로

$$\cot\theta \pm \mathrm{i} = \frac{\cos\theta \pm \mathrm{i}\sin\theta}{\sin\theta}.$$

드무아브르 정리에 의해 $(\cos\theta \pm \mathrm{i}\sin\theta)^{2n+1} = \cos(2n+1)\theta \pm \mathrm{i}\sin(2n+1)\theta$이므로

$$\frac{(\cot\theta+\mathrm{i})^{2n+1} - (\cot\theta-\mathrm{i})^{2n+1}}{2\mathrm{i}} = \frac{2\mathrm{i}\sin(2n+1)\theta}{2\mathrm{i}\,\sin^{2n+1}\theta} = \frac{\sin(2n+1)\theta}{\sin^{2n+1}\theta},$$

이고, 이것이 구하는 항등식(identity)이다.

이번에는 좌변을 이항정리로 전개한다. $c = \cot\theta$, $N = 2n+1$로 두면

$$(c+\mathrm{i})^N - (c-\mathrm{i})^N = \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} c^{N-k}\,\mathrm{i}^k\bigl(1-(-1)^k\bigr).$$

괄호 안의 값은 k가 짝수이면 0, 홀수이면 2이다. $j = 0, 1, \ldots, n$에 대하여 $k = 2j+1$로 두면 $\mathrm{i}^k = \mathrm{i}(-1)^j$이고 $c^{N-k} = c^{2(n-j)}$이다. 2i로 나누고 $x = \cot^2\theta$로 쓰면

$$\frac{\sin(2n+1)\theta}{\sin^{2n+1}\theta} = \sum_{j=0}^{n}(-1)^j\binom{2n+1}{2j+1}x^{n-j} = \binom{2n+1}{1}x^n - \binom{2n+1}{3}x^{n-1} + \cdots + (-1)^n.$$

이 다항식을 $P(x)$라 하자. $P(x)$는 n차 다항식이고, 최고차항 계수(leading coefficient)는 $2n+1 \neq 0$이다.

$m = 1, \ldots, n$에 대하여 $\theta_m = \dfrac{m\pi}{2n+1}$로 둔다. 그러면 $0 < \theta_m < \frac{1}{2}\pi$이므로 $\sin\theta_m \neq 0$이고, $\sin(2n+1)\theta_m = \sin m\pi = 0$이다. 따라서

$$P\bigl(\cot^2\theta_m\bigr) = 0, \qquad m = 1, 2, \ldots, n.$$

생각해 보기 이것들이 해의 일부가 아니라 모든 해라는 것을 어떻게 알 수 있을까?

$(0, \frac{1}{2}\pi)$에서 $\cot\theta$는 양수이고 순감소하므로 $\cot^2\theta$도 순감소한다. 각 $\theta_1 < \theta_2 < \cdots < \theta_n$은 모두 이 구간에 있으므로 n개의 수 $\cot^2\theta_m$은 서로 다르다. n차 다항식의 근은 많아야 n개이므로, 이것들이 정확히 $P(x) = 0$의 모든 해이다.

소문항 (ii)

$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots$의 근의 합은 $-a_{n-1}/a_n$이다. 여기서 $a_n = \binom{2n+1}{1}$, $a_{n-1} = -\binom{2n+1}{3}$이므로

$$\sum_{m=1}^{n}\cot^2\left(\frac{m\pi}{2n+1}\right) = \frac{\binom{2n+1}{3}}{\binom{2n+1}{1}} = \frac{(2n+1)(2n)(2n-1)}{6\,(2n+1)} = \frac{n(2n-1)}{3},$$

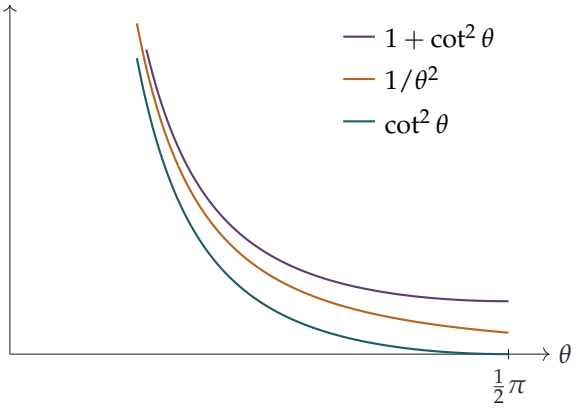
이고, 이것이 증명하려던 식이다.

소문항 (iii)

$0 < \theta < \frac{1}{2}\pi$에서 $0 < \sin\theta < \theta < \tan\theta$가 주어져 있다. 세 값이 모두 양수이므로 제곱해도 대소 관계가 유지되고, 역수를 취하면 대소 관계가 뒤집힌다.

$$\frac{1}{\tan^2\theta} < \frac{1}{\theta^2} < \frac{1}{\sin^2\theta}, \qquad \text{즉} \qquad \cot^2\theta < \frac{1}{\theta^2} < 1 + \cot^2\theta,$$

여기서 $\operatorname{cosec}^2\theta = 1 + \cot^2\theta$를 이용하였다.



$\theta = \theta_m = \dfrac{m\pi}{2n+1}$로 두면 $\dfrac{1}{\theta_m^2} = \dfrac{(2n+1)^2}{\pi^2} \cdot \dfrac{1}{m^2}$이고, $m = 1, \ldots, n$에 대한 부등식을 모두 더한다. $S_n = \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m^2}$로 쓰고 소문항 (ii)를 이용하면

$$\frac{n(2n-1)}{3} < \frac{(2n+1)^2}{\pi^2} S_n < n + \frac{n(2n-1)}{3} = \frac{2n(n+1)}{3}.$$

양변에 $\pi^2/(2n+1)^2 > 0$을 곱하면

$$\frac{\pi^2}{3} \cdot \frac{n(2n-1)}{(2n+1)^2} < S_n < \frac{\pi^2}{3} \cdot \frac{2n(n+1)}{(2n+1)^2}.$$

분자와 분모를 n^2으로 나누어 보면, $n \to \infty$일 때 두 분수는 모두 $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$로 수렴하므로 두 경계는 모두 $\frac{\pi^2}{6}$으로 수렴한다. 조임 정리(squeeze theorem, sandwich theorem)에 의해 $S_n \to \frac{\pi^2}{6}$이고, 이는

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

임을 뜻한다.

검산

- $n = 1$이면 다항식은 $3x - 1$이고 그 근은 $\frac{1}{3} = \cot^2 \frac{\pi}{3}$이며, (ii)의 공식도 $1 \times 1/3 = \frac{1}{3}$을 준다. $n = 2$이면 $\cot^2 \frac{\pi}{5} + \cot^2 \frac{2\pi}{5}$는 2여야 하는데, 수치로 계산하면 $1.894 + 0.106 = 2.000$이다.
- $n = 50$일 때 (iii)의 경계는 $1.5964 < S_{50} = 1.6251 < 1.6448$이고, $\pi^2/6 \approx 1.6449$이다. 두 경계의 차가 $\pi^2 n/(2n+1)^2 \approx \pi^2/(4n)$이므로, 당연히 두 경계는 서로 가까워진다.

흔한 실수

- 각 $\cot^2\theta_m$이 근임을 보이고 나서, 이것들이 서로 다르다는 논증을 빠뜨리는 것. 바로 이 사실 덕분에 이것들이 **모든** 해가 된다.
- 비에트 공식에서 부호를 틀리는 것. x^{n-1}의 계수는 $-\binom{2n+1}{3}$이므로 근의 합은 $+\binom{2n+1}{3}/\binom{2n+1}{1}$이다.
- 모든 값이 양수라는 점을 언급하지 않고 부등식을 뒤집는 것. 제곱하고 역수를 취할 수 있는 근거가 바로 이 점이다.

STEP 너머

오일러(Euler)는 1734년에 $\sin x/x$를 "무한 다항식"처럼 다루어 계수를 비교함으로써 처음으로 $\sum 1/m^2 = \pi^2/6$을 찾아냈다. 이는 여기서 쓴 비에트의 아이디어와 같지만, 조임 정리가 제공하는 엄밀함은 없었다. 대학에서는 이 합을 푸리에 급수(Fourier series)의 파스발 항등식(Parseval's identity)을 통해, 그리고 리만 제타 함수(Riemann zeta function)의 첫 번째 값인 $\zeta(2)$로서 다시 만나게 된다. $\zeta(2k)$의 값은 모두 π^{2k}의 유리수배이지만, $\zeta(3)$에 대해서는 알려진 것이 거의 없다. 극한과 조임 정리의 바탕에 있는 해석학(analysis)을 공부하려면 Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 이해하기)를 읽어 보라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.