풀이

STEP III 2018, 문제 6

순수수학 • 복소수와 기하

STEP III 2018, 6번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/18-s3-q6

핵심 아이디어

복소수가 실수일 필요충분조건은 그 수가 자신의 켤레복소수(conjugate)와 같은 것이므로, 세 점이 한 직선 위에 있다는 조건(공선, collinear)은 z들과 z^*들 사이의 방정식으로 바뀐다. 단위원(unit circle) 위에서는 $a^* = 1/a$이므로 원 위의 점들의 켤레를 없앨 수 있고, 그러면 현(chord) 위의 임의의 점 q에 대한 **일차** 방정식이 남는다. 이후의 결과는 모두 이러한 현의 방정식 두 개를 쓰고 이들을 더하거나 빼서 얻는다.

풀이

소문항 (i)

A, Q, C가 한 직선 위에 있고 $A \neq C$이므로, 점 Q는 A에 A에서 C로 가는 벡터의 실수배를 더한 것이다. 즉 어떤 실수 t에 대하여 $q - a = t(c - a)$이다. $c \neq a$이므로 나눌 수 있고, 따라서

$$\frac{q-a}{c-a} = t \quad \text{는 실수이다.}$$

실수는 자신의 켤레와 같으므로

$$\frac{q-a}{c-a} = \frac{q^*-a^*}{c^*-a^*},$$

이다. 여기서 $c \neq a$이므로 $c^* - a^* \neq 0$이다. 양변에 분모를 곱하면 $(c-a)(q^*-a^*) = (c^*-a^*)(q-a)$를 얻으며, 이것이 보이려던 식이다.

이제 $aa^* = cc^* = 1$이라 하면 $a^* = 1/a, c^* = 1/c$이다. 그러면

$$c^* - a^* = \frac{1}{c} - \frac{1}{a} = \frac{a-c}{ac} = -\frac{c-a}{ac},$$

이고, 앞의 방정식은

$$(c-a)\left(q^* - \frac{1}{a}\right) = -\frac{c-a}{ac}(q-a).$$

이 된다. $c-a \neq 0$으로 나누고 $-ac$를 곱하면

$$-ac\,q^* + c = q - a, \qquad \text{즉,} \qquad q + ac\,q^* = a + c.$$

이것이 현 AC의 방정식이다. A와 C를 지나는 직선 위의 모든 점 q가 이 식을 만족한다.

소문항 (ii)

A, B, C, D가 시계 반대 방향 순서로 놓여 있으므로, AC와 BD는 원에 내접하는 볼록 사각형(convex quadrilateral)의 대각선(diagonal)이고, 따라서 원의 내부에 있는 한 점 Q에서 만난다. 특히 Q는 네 점 모두와 다르므로, 직선 AC와 BD에 소문항 (i)을 적용할 수 있다.

$$q + ac\,q^* = a + c,$$
$$q + bd\,q^* = b + d.$$

첫째 식에서 둘째 식을 빼면 q가 사라진다.

$$(ac - bd)\,q^* = (a+c) - (b+d). \tag{1}$$

생각해 보기 q^*에 대한 식은 얻었다. 여기에 더할 q에 대한 식은 어떻게 얻을까?

(1)의 켤레를 취하고 다시 $a^* = 1/a$ 등을 이용한다. 좌변은

$$\left(\frac{1}{ac} - \frac{1}{bd}\right)q = \frac{bd - ac}{abcd}\,q,$$

가 되고, 우변은

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{c} - \frac{1}{b} - \frac{1}{d} = \frac{a+c}{ac} - \frac{b+d}{bd} = \frac{bd(a+c) - ac(b+d)}{abcd}.$$

가 된다. $-abcd$를 곱하면

$$(ac - bd)\,q = ac(b+d) - bd(a+c). \tag{2}$$

(1)과 (2)를 더하면

$$(ac - bd)(q + q^*) = a + c - b - d + abc + acd - abd - bcd.$$

우변의 항들을 묶으면

$$(a-b) + (acd - bcd) + (c-d) + (abc - abd) = (a-b)(1+cd) + (c-d)(1+ab),$$

이고, 이로써 원하는 결과를 얻는다.

소문항 (iii)

직선 AB와 CD는 내접 사각형의 마주 보는 두 변이므로, 이들이 만나는 점 P는 원의 외부에 있다. 따라서 P는 A, B와 다르고, C, D와도 다르다. 한 직선 위에 있는 점 A, P, B에 소문항 (i)을 적용하면 $p + ab\,p^* = a + b$이다. p가 실수이므로 $p^* = p$이고, 따라서

$$p(1 + ab) = a + b.$$

같은 방법으로 C, P, D로부터

$$p(1 + cd) = c + d.$$

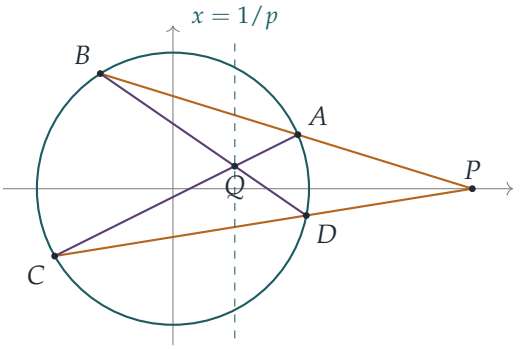
이제 소문항 (ii)의 최종 결과에 p를 곱하고 이 두 식을 대입하면

$$\begin{aligned} p\,(ac - bd)(q + q^*) &= (a - b)\,p(1 + cd) + (c - d)\,p(1 + ab) \\ &= (a - b)(c + d) + (c - d)(a + b) \\ &= (ac + ad - bc - bd) + (ac + bc - ad - bd) \\ &= 2(ac - bd). \end{aligned}$$

$ac - bd \neq 0$이므로 이것으로 나눌 수 있고, 보이려던 대로 $p(q + q^*) = 2$를 얻는다.

사실 여기서 $ac - bd$는 결코 0이 될 수 없다. 만약 $ac = bd$이면 (1)에 의해 $a + c = b + d$도 성립하므로, $z^2 - (a + c)z + ac$와 $z^2 - (b + d)z + bd$는 같은 이차식이다. 그러면 $\{a, c\} = \{b, d\}$가 되어 네 점이 서로 다르다는 데 모순이다.

$q + q^* = 2\,\mathrm{Re}\,q$이므로, 이 결과는 $\mathrm{Re}\,q = 1/p$임을 말해 준다. P를 지나는 두 직선을 어떻게 고르든, 대각선의 교점 Q는 고정된 수직선 $x = 1/p$ 위에 놓인다.



검산

- 대칭인 경우: A, B를 각 $20°$, $70°$에, C, D를 $-70°$, $-20°$에 잡는다. 실수축에 대한 대칭에 의해 P와 Q는 모두 실수이고, 결과는 $pq = 1$이라고 말한다. $a = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$, $b = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}$라 하면, 공

식 $p = (a+b)/(1+ab)$로부터 $p = \cos\frac{\alpha-\beta}{2}/\cos\frac{\alpha+\beta}{2} = \cos 25^\circ / \cos 45^\circ \approx 1.2817$이다. AC가 실수축과 만나는 점으로 q를 직접 구하면 $q \approx 0.7802$이고, $pq \approx 1.0000$이다.

- 그림에서는 $p = 2.2$를 사용한다. 예측대로 대각선은 $x \approx 0.4545 = 1/2.2$에서 만난다. 또한 세 항등식 모두 무작위로 만든 수천 개의 배치에서 컴퓨터로 확인하였다.

흔한 실수

- $ac - bd$의 켤레가 다시 $ac - bd$가 아니라 $1/(ac) - 1/(bd)$라는 것을 잊는 실수. 인수 $abcd$를 주의 깊게 없애야 한다.
- $c - a$나 $ac - bd$가 왜 0이 아닌지 밝히지 않고 이것으로 나누는 실수.

STEP 너머

여기서 Q는 원에 대한 P의 **극선**(polar) 위에 놓인다. 단위원 밖에서 중심으로부터 거리 p에 있는 점 P의 극선은 OP에 수직이고 O로부터 거리 $1/p$에 있는 직선이다. 이는 사영기하학(projective geometry)의 브로카르(Brocard) 정리의 일부이며, 그 배후에 있는 사상 $P \mapsto 1/p^*$는 원에 대한 **반전**(inversion)으로, 복소해석학(complex analysis)과 기하학의 핵심 도구이다. Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)는 반전과 아르강 도표(Argand diagram)의 기하학을 아름답게 전개한다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.