풀이

STEP III 2018, 문제 5

순수수학 • 산술-기하 평균 부등식

> **STEP III 2018, 5번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/18-s3-q5

핵심 아이디어

이것은 산술-기하 평균 부등식(AM–GM inequality)을 수학적 귀납법(induction)으로 증명하는 것이지만, 한 가지 변형이 있다. $A_n \geq G_n$을 직접 보이는 대신, 새로운 수를 하나 추가할 때 가중된 차이 $n(A_n - G_n)$이 결코 감소하지 않음을 보인다. 이 차이는 $n = 1$일 때 0에서 시작하므로 계속 음이 아닌 값을 유지한다. 양 λ_k는 G_{k+1}이 G_k의 간단한 배수가 되도록 선택된 것이며, 이로써 전체 비교가 한 변수에 대한 다항식 부등식(polynomial inequality)으로 바뀐다.

풀이

소문항 (i)

두 가지 사실이 k단계와 $k+1$단계를 연결한다. 합에 대해서는

$$(k+1)A_{k+1} = a_1 + \cdots + a_k + a_{k+1} = kA_k + a_{k+1}.$$

곱에 대해서는 $G_k^k = a_1 a_2 \cdots a_k$이고, λ_k의 정의에서 $a_{k+1} = G_k \lambda_k^{k+1}$이다. 따라서

$$G_{k+1}^{k+1} = G_k^k \, a_{k+1} = G_k^k \cdot G_k \lambda_k^{k+1} = (G_k \lambda_k)^{k+1}, \qquad \text{따라서} \qquad G_{k+1} = G_k \lambda_k,$$

이다. 여기서 $G_k > 0$이고 $\lambda_k > 0$이므로 양의 $(k+1)$제곱근을 취하였다. 바로 이것이 λ_k를 그렇게 정의한 이유이다.

이제 양변을 비교한다.

$$\begin{aligned}(k+1)(A_{k+1}-G_{k+1})-k(A_k-G_k) &= kA_k + a_{k+1} - (k+1)G_{k+1} - kA_k + kG_k \\ &= G_k\lambda_k^{k+1} - (k+1)G_k\lambda_k + kG_k \\ &= G_k(\lambda_k^{k+1} - (k+1)\lambda_k + k).\end{aligned}$$

$G_k > 0$이므로 좌변이 ≥ 0일 필요충분조건은 괄호 안의 식이 ≥ 0인 것이다. 이것이 요구된 동치 관계이다.

소문항 (ii)

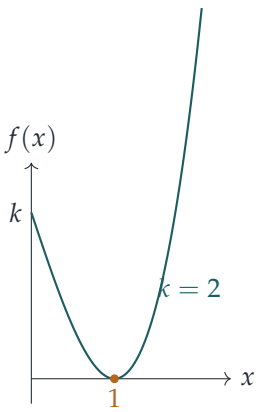
미분하면

$$f'(x) = (k+1)x^k - (k+1) = (k+1)(x^k - 1).$$

$0 < x < 1$이면 $x^k < 1$이므로 $f'(x) < 0$이고, $x > 1$이면 $x^k > 1$이므로 $f'(x) > 0$이다. 따라서 f는 $(0,1]$에서 순감소(strictly decreasing)하고 $[1,\infty)$에서 순증가(strictly increasing)하며, $x > 0$에서의 최솟값은

$$f(1) = 1 - (k+1) + k = 0$$

이다. 그러므로 모든 $x > 0$에 대하여 $f(x) \geq 0$이다. 또한 $x \neq 1$이면 1의 양쪽에서의 순단조성에 의해 $f(x) > f(1) = 0$이다. 따라서 $f(x) = 0$인 것은 $x = 1$일 때뿐이고, $f(1) = 0$이 그 역을 준다.



($k = 2$일 때 $f(x) = x^3 - 3x + 2 = (x-1)^2(x+2)$이다. $x = 1$에서의 중근(double root)은 그래프가 축에 접하기만 하는 지점이다.)

소문항 (iii)

각 양의 정수 n에 대하여 $d_n = n(A_n - G_n)$이라 하자.

(a) $x = \lambda_k > 0$으로 두고 소문항 (ii)를 적용하면 $\lambda_k^{k+1} - (k+1)\lambda_k + k \geq 0$이므로, 소문항 (i)에 의해

$$d_{k+1} \geq d_k \qquad \text{모든} k \geq 1.$$

이다. 또한 $A_1 = a_1 = G_1$이므로 $d_1 = 0$이다. 따라서

$$0 = d_1 \leq d_2 \leq d_3 \leq \cdots \leq d_n,$$

이므로 $d_n \geq 0$이고, $n > 0$으로 나누면 모든 n에 대하여 $A_n \geq G_n$을 얻는다.

(b)

> **생각해 보기** $A_n = G_n$이라면, 이것은 사슬의 마지막 단계뿐만 아니라 그 이전 단계들에 대해서도 무엇을 말해 주는가?

$A_n = G_n$이면 $d_n = 0$이고, 사슬은 $0 = d_1 \leq d_2 \leq \cdots \leq d_n = 0$이 된다. 0에서 시작하여 0에서 끝나는 감소하지 않는 사슬은 상수여야 하므로, 각 $k = 1, \ldots, n-1$에 대하여 $d_{k+1} = d_k$이다. 소문항 (i)의 항등식에 의해 이는 $G_k f(\lambda_k) = 0$을 뜻하고, $G_k > 0$이므로 $f(\lambda_k) = 0$이다. 소문항 (ii)에 의해 각 $k = 1, \ldots, n-1$에 대하여 $\lambda_k = 1$이며, 이는 $a_{k+1} = G_k$라는 뜻이다.

이제 k에 대한 귀납법으로 논증한다. $k = 1$일 때 $a_2 = G_1 = a_1$이다. $a_1 = \cdots = a_k = a$이면 $G_k = (a^k)^{1/k} = a$이므로 $a_{k+1} = G_k = a$이다. 따라서 요구된 대로 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$이다.

검산

$a_1, a_2, a_3 = 1, 4, 16$으로 두자. 그러면 $A_2 = 2.5$, $G_2 = 2$, $A_3 = 7$, $G_3 = 4$이므로 $d_1, d_2, d_3 = 0, 1, 9$이다. 약속한 대로 증가한다. 여기서 $\lambda_2 = (16/2)^{1/3} = 2$이고 $G_2 f(\lambda_2) = 2(8 - 6 + 2) = 8 = d_3 - d_2$이므로, 소문항 (i)의 항등식이 확인된다. 수천 개의 무작위 양수 수열에 대하여 이 항등식과 $d_{k+1} \geq d_k$를 컴퓨터로 확인한 결과 예외는 발견되지 않았다.

흔한 실수

- 소문항 (i)에서 한쪽 방향만 증명하는 것. 차이를 $G_k f(\lambda_k)$로 쓰면 $G_k > 0$이므로 양방향이 한꺼번에 얻어진다.
- (iii)(b)에서 $\lambda_{n-1} = 1$이라는 결론만 내리는 것. 사슬의 모든 단계가 등호여야 하며, 이는 사슬이 $d_1 = 0$에서 시작한다는 사실에서 나온다.
- $x > 0$인 경우만 다루는 소문항 (ii)를 적용하기 전에 왜 $\lambda_k > 0$인지 밝히는 것을 잊는 것.

STEP 너머

부등식 $x^{k+1} - (k+1)x + k \geq 0$은 베르누이 부등식(Bernoulli's inequality)의 특수한 경우이고, 산술-기하 평균 부등식 자체는 오목함수(concave function) $\ln x$에 대한 젠센 부등식(Jensen's inequality)의 특수한 경우이다. 이러한 볼록성(convexity) 부등식은 대학 1학년 해석학(analysis)의 기본 도구이다. 코시(Cauchy)의 "전진–후진" 귀납법을 포함하여 산술-기하 평균 부등식의 다른 여러 증명을 살펴보는 것은 좋은 연습이 된다. Bartle과 Sherbert의 *Introduction to Real Analysis*(실해석학 입문)가 해석학의 배경 지식을 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.