풀이

STEP III 2018, 문제 4

순수수학 • 쌍곡선의 접선

> **STEP III 2018, 4번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/18-s3-q4

핵심 아이디어

접선(tangent)은 $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ 위의 점 (x_1, y_1)에서의 접선이 $xx_1/a^2 - yy_1/b^2 = 1$이라는 표준적인 결과를 쓰면 가장 빨리 구할 수 있다. 그다음부터는 모두 두 직선이 만나는 문제이므로, 일차방정식 쌍을 풀고 삼각함수 식을 정리하기만 하면 된다. 소문항 (ii)에서 수직 조건은 b를 포함하는 $\sin\theta$와 $\sin\phi$ 사이의 관계식 하나이며, 바로 이 관계식 덕분에 식에서 b를 없앴다가 다시 $a^2 - b^2$의 꼴로 되살릴 수 있다. 합을 곱으로 바꾸는 공식(sum-to-product formulae)을 쓰면 마지막 계산이 짧아진다.

풀이

P에서의 접선

$x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$을 음함수 미분(implicit differentiation)하면 $\dfrac{2x}{a^2} - \dfrac{2y}{b^2}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0$이므로, (x_1, y_1)에서의 기울기(gradient)는 $\dfrac{b^2x_1}{a^2y_1}$이고 접선은

$$y - y_1 = \frac{b^2x_1}{a^2y_1}(x - x_1) \iff \frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} = 1,$$

이다. 여기서 (x_1, y_1)이 곡선 위에 있다는 사실을 이용했다. (이 꼴은 $y_1 = 0$이고 접선이 수직선인 꼭짓점(vertex)의 경우도 포함한다.) $x_1 = a\sec\theta$, $y_1 = b\tan\theta$를 대입하면

$$\frac{x\sec\theta}{a} - \frac{y\tan\theta}{b} = 1.$$

양변에 $ab\cos\theta$를 곱하면 ($\sec\theta$가 존재하므로 이 값은 0이 아니다)

$$bx - ay\sin\theta = ab\cos\theta,$$

를 얻으며, 이것이 구하는 식이다.

소문항 (i)

주어진 두 직선은 점근선(asymptote) $y = \pm\frac{b}{a}x$이다.

S에서는 $ay = bx$이다. $ay = bx$를 접선의 방정식에 대입하면 $bx(1-\sin\theta) = ab\cos\theta$이므로

$$S = \left(\frac{a\cos\theta}{1-\sin\theta},\ \frac{b\cos\theta}{1-\sin\theta}\right).$$

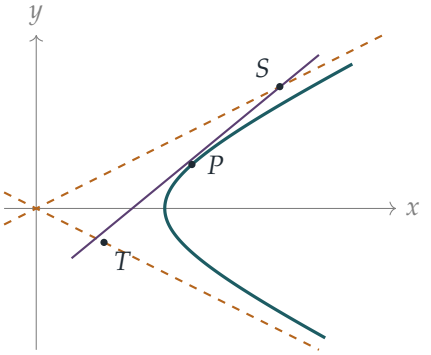
T에서는 $ay = -bx$이고, 이로부터 $bx(1+\sin\theta) = ab\cos\theta$를 얻으므로

$$T = \left(\frac{a\cos\theta}{1+\sin\theta},\ -\frac{b\cos\theta}{1+\sin\theta}\right).$$

$\cos\theta \neq 0$이면 $\sin\theta \neq \pm 1$이므로 두 분모는 모두 0이 아니다. 두 좌표를 더하고 $(1-\sin\theta)(1+\sin\theta) = \cos^2\theta$를 이용하면

$$x_S + x_T = a\cos\theta \cdot \frac{(1+\sin\theta)+(1-\sin\theta)}{\cos^2\theta} = \frac{2a}{\cos\theta} = 2a\sec\theta,$$
$$y_S + y_T = b\cos\theta \cdot \frac{(1+\sin\theta)-(1-\sin\theta)}{\cos^2\theta} = \frac{2b\sin\theta}{\cos\theta} = 2b\tan\theta.$$

따라서 ST의 중점(mid-point)은 $(a\sec\theta,\ b\tan\theta)$이다. 즉 **$ST$의 중점은 바로 P이다**. 임의의 점에서의 접선은 두 점근선에 의해 접점에서 이등분된다.



소문항 (ii)

수직 조건. 접선을 $ay\sin\theta = bx - ab\cos\theta$로 쓰면, $\sin\theta \neq 0$일 때 P에서의 접선의 기울기는 $\dfrac{b}{a\sin\theta}$이다. ($\sin\theta = 0$이면 접선이 수직선이므로 Q에서의 접선은 수평선이어야 한다. 그러나 $b/(a\sin\phi) \neq 0$이므로 수평인 접선은 없다. 따라서 $\sin\theta \neq 0$이고, 마찬가지로 $\sin\phi \neq 0$이다.) 두 접선이 수직(perpendicular)이려면 기울기의 곱이 -1이어야 한다.

$$\frac{b^2}{a^2\sin\theta\sin\phi} = -1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \sin\theta\sin\phi = -\frac{b^2}{a^2}. \tag{$*$}$$

특히 $\sin\theta$와 $\sin\phi$는 부호가 반대이므로 $\sin\phi - \sin\theta \neq 0$이다. $(*)$가 성립하려면 $b^2/a^2 < 1$이어야 하는데, 바로 여기서 $a > b$가 쓰인다.

교점. 점 (x, y)는 다음을 만족한다.

$$bx - ay\sin\theta = ab\cos\theta, \qquad bx - ay\sin\phi = ab\cos\phi.$$

첫째 식에서 둘째 식을 빼면 $ay(\sin\phi - \sin\theta) = ab(\cos\theta - \cos\phi)$이다. 첫째 식에 $\sin\phi$를, 둘째 식에 $\sin\theta$를 곱하여 빼면 $bx(\sin\phi - \sin\theta) = ab(\sin\phi\cos\theta - \cos\phi\sin\theta) = ab\sin(\phi - \theta)$이다. 따라서

$$x = \frac{a\sin(\phi-\theta)}{\sin\phi - \sin\theta}, \qquad y = \frac{b(\cos\theta - \cos\phi)}{\sin\phi - \sin\theta}.$$

생각해 보기 이 식에는 아직 b가 남아 있다. x^2과 y^2을 a, θ, ϕ만으로 나타내려면 어떻게 해야 할까? 또 분수를 간단히 할 수 있을까?

조건 $(*)$는 $b^2 = -a^2\sin\theta\sin\phi$를 뜻하므로, 제곱하면 b를 없앨 수 있다. 식을 간단히 하기 위해 $\alpha = \frac{1}{2}(\phi+\theta)$, $\beta = \frac{1}{2}(\phi-\theta)$로 놓는다. 합을 곱으로 바꾸는 공식에 의해

$$\sin\phi - \sin\theta = 2\cos\alpha\sin\beta, \qquad \cos\theta - \cos\phi = 2\sin\alpha\sin\beta, \qquad \sin(\phi-\theta) = 2\sin\beta\cos\beta,$$

이고, $\sin\phi - \sin\theta \neq 0$이므로 $\cos\alpha\sin\beta \neq 0$이다. $2\sin\beta$를 약분하면

$$x = \frac{a\cos\beta}{\cos\alpha}, \qquad y = b\tan\alpha,$$

이고, 따라서

$$x^2 = \frac{a^2\cos^2(\frac{1}{2}(\phi-\theta))}{\cos^2(\frac{1}{2}(\phi+\theta))},$$
$$y^2 = -a^2\sin\theta\sin\phi\,\tan^2(\tfrac{1}{2}(\phi+\theta)).$$

반각(half-angle)을 쓰지 않고 같은 내용을 나타내면

$$x^2 = \frac{a^2\sin^2(\phi-\theta)}{(\sin\phi-\sin\theta)^2}, \qquad y^2 = -\frac{a^2\sin\theta\sin\phi\,(\cos\theta-\cos\phi)^2}{(\sin\phi-\sin\theta)^2}.$$

원. $\sin\theta\sin\phi$도 α와 β로 나타내야 한다. $\theta = \alpha - \beta$, $\phi = \alpha + \beta$이므로

$$\begin{aligned}\sin\theta\sin\phi &= \sin^2\alpha\cos^2\beta - \cos^2\alpha\sin^2\beta \\ &= (1-\cos^2\alpha)\cos^2\beta - \cos^2\alpha(1-\cos^2\beta) = \cos^2\beta - \cos^2\alpha.\end{aligned}$$

$k = \sin\theta\sin\phi = \cos^2\beta - \cos^2\alpha$로 놓자. 그러면 $\tan^2\alpha = (1-\cos^2\alpha)/\cos^2\alpha$이므로

$$\begin{aligned} x^2+y^2 &= \frac{a^2}{\cos^2\alpha}\left[\cos^2\beta - k(1-\cos^2\alpha)\right] \\ &= \frac{a^2}{\cos^2\alpha}\left[(\cos^2\beta - k) + k\cos^2\alpha\right] \\ &= \frac{a^2}{\cos^2\alpha}\left[\cos^2\alpha + k\cos^2\alpha\right] \qquad \text{왜냐하면 } \cos^2\beta - k = \cos^2\alpha \\ &= a^2(1+k) = a^2 + a^2\sin\theta\sin\phi = a^2 - b^2, \end{aligned}$$

이며, 마지막 단계에서 $(*)$를 이용했다. 따라서 서로 수직인 두 접선의 교점은 항상 원 $x^2+y^2 = a^2-b^2$ 위에 있으며, 이것이 증명하려던 것이다.

검산

- $a=2, b=1, \theta=\frac{\pi}{6}, \phi=-\frac{\pi}{6}$로 잡자. 그러면 $\sin\theta\sin\phi = -\frac{1}{4} = -b^2/a^2$이므로 두 접선은 수직이다(기울기는 1과 -1). 이때 $\alpha=0, \beta=-\frac{\pi}{6}$이므로 $x = 2\cos\frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$, $y=0$이고 $x^2+y^2 = 3 = a^2-b^2$이다. 직접 확인해 보아도 두 접선 $x-y=\sqrt{3}$과 $x+y=\sqrt{3}$은 실제로 $(\sqrt{3},0)$에서 만난다.
- 소문항 (i)에서 $\theta\to 0$이면 접선은 수직선 $x=a$가 되고, 이 직선은 점근선과 $(a,\pm b)$에서 만나며 그 중점은 $(a,0)=P$이다.
- 소문항 (i)의 중점과 $x^2+y^2=a^2-b^2$을 포함한 위의 모든 공식은, $a>b>0$과 수직인 쌍 θ,ϕ를 무작위로 수천 번 골라 두 접선의 방정식을 직접 푸는 방식으로 컴퓨터를 통해 확인했다.

흔한 실수

- x^2과 y^2의 식에 b를 남겨 두는 것: 문제는 a, θ, ϕ만으로 나타내라고 했으므로 $(*)$를 이용하여 b^2을 소거해야 한다.
- 식을 잘못 정리하여 접선의 기울기를 $-b/(a\sin\theta)$로 잡는 것: 제1사분면(first quadrant)의 점에서 기울기가 양수인지 확인해 보라.
- $\sin\phi - \sin\theta$가 왜 0이 아닌지 밝히지 않고 이것으로 나누는 것.

STEP 너머

소문항 (ii)의 원은 쌍곡선(hyperbola)의 **준원**(*director circle*), 즉 그 점에서 그은 두 접선이 서로 수직이 되는 점들의 자취(locus)이다. 타원(ellipse)의 준원은 $x^2+y^2=a^2+b^2$이고,

$a < b$인 쌍곡선에는 실제 준원이 아예 존재하지 않는다. 문제에서 $a > b$를 굳이 요구하는 이유가 여기에 있다. 소문항 (i)의 이등분 성질은 원뿔곡선(conic)의 사영기하학(projective geometry)과 아핀기하학(affine geometry)을 처음으로 엿보게 해 준다. 이 분야에서는 접선, 점근선, 극과 극선(poles and polars)을 하나의 관점에서 통일적으로 다룬다. 바로 이런 성격의 문제를 더 풀어 보고 싶다면 Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*를 참고하라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.