풀이

STEP III 2018, 문제 3

순수수학 • 오일러 미분방정식

> **STEP III 2018, 3번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/18-s3-q3

핵심 아이디어

좌변은 오일러(Euler) 방정식, 곧 등차원 방정식(equidimensional equation)이다. 각 도함수에 그 계수와 맞는 x의 거듭제곱이 곱해져 있다. 중첩된 꼴 $(*)$를 전개하여 계수를 비교하면 a, b, c가 결정된다. 방정식을 이 꼴로 쓰고 나면 도함수를 하나씩 벗겨 내는 두 번의 간단한 적분으로 풀 수 있다. 경우가 나뉘는 것은 정확히 그 적분 가운데 하나가 x^{-1}의 적분이 되어 로그가 나올 때이다.

풀이

모든 x의 거듭제곱이 정의되도록 처음부터 끝까지 $x > 0$에서 생각한다.

a, b, c 구하기

곱의 미분법(product rule)에 의하여

$$(x^c y)' = x^c y' + cx^{c-1}y, \qquad \text{따라서} \qquad x^b(x^c y)' = x^{b+c}y' + cx^{b+c-1}y.$$

한 번 더 미분하면

$$(x^b(x^c y)')' = x^{b+c}y'' + (b+c)x^{b+c-1}y' + cx^{b+c-1}y' + c(b+c-1)x^{b+c-2}y.$$

여기에 x^a를 곱하고 $a + b + c = 2$로 택하면

$$x^a(x^b(x^c y)')' = x^2y'' + (b+2c)\,xy' + c(b+c-1)\,y.$$

이것이 주어진 좌변과 일치하려면

$$b + 2c = 1 - 2p, \qquad c(b+c-1) = p^2 - q^2.$$

이어야 한다. 첫 번째 식에서 $b+c-1=-2p-c$이므로 두 번째 식은 $-c^2-2pc=p^2-q^2$, 곧 $(c+p)^2=q^2$이 된다. $c+p=q$로 택하면

$$c=q-p, \qquad b=1-2p-2c=1-2q, \qquad a=2-b-c=1+p+q.$$

따라서 방정식은

$$x^{1+p+q}\left(x^{1-2q}(x^{q-p}y)'\right)'=\mathrm{f}(x),$$

로 쓸 수 있으며, 이것이 보이려던 것이다. (다른 근 $c+p=-q$를 택하면 q 대신 $-q$를 넣은 같은 결과가 나오는데, 방정식에는 q^2만 나타나므로 달라지는 것이 없다.)

소문항 (i)

$\mathrm{f}=0$이면 $x^{1+p+q}\neq 0$으로 나눌 수 있다.

$$\left(x^{1-2q}(x^{q-p}y)'\right)'=0 \quad\Longrightarrow\quad x^{1-2q}(x^{q-p}y)'=A \quad\Longrightarrow\quad (x^{q-p}y)'=Ax^{2q-1},$$

여기서 A는 상수이다. 다음 적분은 지수 $2q-1$이 -1인지 아닌지에 따라 달라진다.

> **?** **생각해 보기** 왜 여기서는 p의 값에 따라 경우가 나뉘지 않는가?

적분하는 지수는 $2q-1$이고, 여기에는 p가 들어 있지 않다. p는 마지막에 나누어 주는 인수 x^{q-p}를 통해서만 들어온다. 따라서 경우는 q에만 의존한다.

$q\neq 0$인 경우. 적분하면 $x^{q-p}y=\dfrac{A}{2q}x^{2q}+B$이고, x^{p-q}를 곱하면 (상수 $\frac{A}{2q}$를 다시 A로 쓰면)

$$y=Ax^{p+q}+Bx^{p-q}.$$

$q=0$인 경우. 이제 $(x^{-p}y)'=Ax^{-1}$이므로 $x^{-p}y=A\ln x+B$이고

$$y=x^p\,(A\ln x+B).$$

두 경우 모두 2계 방정식(second-order equation)에서 예상하듯이 임의상수가 두 개 있다.

소문항 (ii)

이것은 $\mathrm{f}(x)=x^n$이고 $q=0$인 경우이므로 $a=1+p$, $b=1$, $c=-p$이며, 방정식은

$$x^{1+p}\left(x(x^{-p}y)'\right)'=x^n \quad\Longleftrightarrow\quad \left(x(x^{-p}y)'\right)'=x^{n-p-1}.$$

이 된다. 첫 번째 적분에는 x^{n-p-1}이 나오는데, 이것은 정확히 $n=p$일 때 x^{-1}이다.

$n\neq p$인 경우. 한 번 적분하면

$$x(x^{-p}y)'=\frac{x^{n-p}}{n-p}+A \quad\Longrightarrow\quad (x^{-p}y)'=\frac{x^{n-p-1}}{n-p}+\frac{A}{x}.$$

여기서도 $n-p \neq 0$이므로 적분하면

$$x^{-p}y = \frac{x^{n-p}}{(n-p)^2} + A\ln x + B, \qquad \text{따라서} \qquad y = \frac{x^n}{(n-p)^2} + x^p\,(A\ln x + B).$$

$n = p$**인 경우.** 이번에는 첫 번째 적분에서 로그가 나온다.

$$x(x^{-p}y)' = \ln x + A \quad \Longrightarrow \quad (x^{-p}y)' = \frac{\ln x}{x} + \frac{A}{x}.$$

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{1}{2}(\ln x)^2 = \frac{\ln x}{x}$이므로

$$x^{-p}y = \tfrac{1}{2}(\ln x)^2 + A\ln x + B, \qquad \text{따라서} \qquad y = x^p\left(\tfrac{1}{2}(\ln x)^2 + A\ln x + B\right).$$

두 경우 모두 A와 B가 들어 있는 부분은 소문항 (i)에서 $q = 0$일 때의 여함수(complementary function)이며, 마땅히 그래야 한다.

검산

- $p = q = 0$으로 두면 방정식은 $x^2y'' + xy' = 0$, 곧 $(xy')' = 0$이므로 $y = A\ln x + B$이고, 소문항 (i)과 일치한다.
- 제차 방정식(homogeneous equation)에 $y = x^m$을 대입하면 $m(m-1) + (1-2p)m + p^2 - q^2 = (m-p)^2 - q^2$이므로 $m = p \pm q$이고, $q = 0$일 때 중근이 되어 앞에서 구한 결과와 같다.
- 소문항 (ii)에서 $n = p = 1$이면 $y = \frac{1}{2}x(\ln x)^2$에 대하여 $y' = \frac{1}{2}(\ln x)^2 + \ln x$, $y'' = \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x}$이므로 $x^2y'' - xy' + y = x\ln x + x - \frac{1}{2}x(\ln x)^2 - x\ln x + \frac{1}{2}x(\ln x)^2 = x$가 되어 요구한 대로이다.
- 또한 모든 해를 p, q, n, x의 여러 무작위 값에서 컴퓨터로 방정식에 다시 대입해 보았으며, 잔차는 반올림 오차 범위(약 10^{-6})에서 0이었다.

흔한 실수

- (i)에서 $q = 0$인 경우나 (ii)에서 $n = p$인 경우를 빠뜨리는 것. 이때는 거듭제곱의 적분 공식 대신 $\int x^{-1}\,\mathrm{d}x = \ln x$를 써야 한다.
- 첫 단계에서 적분상수를 빠뜨리는 것. 바로 이 상수가 두 번째 독립인 해를 만들어 낸다.
- 이유를 밝히지 않고 $a + b + c = 2$로 두는 것. 이 조건은 y''에 x^2이 곱해지도록 하기 위해 필요하다.

STEP 너머

2계 연산자를 1계 연산자들의 합성으로 쓰는 것을 연산자의 **인수분해**(factorising)라고 하며, 이는 계수 내림법(reduction of order)과 양자역학의 사다리 연산자(ladder operator) 뒤에 있는 아이디어이다. 치환 $x = \mathrm{e}^t$는 모든 오일러 방정식을 상수계수 방정식으로 바꾸며, 이것으로 중근 $m = p$와 $\ln x$ (곧 t) 인수가 나타나는 이유가 설명된다. Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정식)은 오일러 방정식과 계수 내림법을 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.