풀이

STEP III 2018, 문제 2

순수수학 • 에르미트 다항식

STEP III 2018, 2번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/18-s3-q2

핵심 아이디어

정의를 뒤집어 보자. 정의는 z의 n계 도함수(derivative)가 $(-1)^n y_n z$라는 뜻이다. 이것을 한 번 더 미분하고 $n+1$에 대한 같은 명제와 비교하면 소문항 (i)이 한 줄로 나온다. 그다음에는 소문항 (i)이 점화식(recurrence)을 미분할 수 있게 해 주는 도구가 되고, 이것이 (ii)의 귀납법(induction)을 이끈다. 마지막 부등식(inequality)은 (ii)의 항등식(identity)에서 두 번째의 아주 짧은 귀납법으로 따라 나온다.

풀이

처음부터 끝까지 $z = \mathrm{e}^{-x^2}$이므로 $z' = -2xz$이고, 모든 x에 대하여 $z > 0$이다. 정의를 정리하면

$$\frac{\mathrm{d}^n z}{\mathrm{d}x^n} = (-1)^n y_n z \qquad (n \geq 0),$$

이고, $y_0 = 1$이므로 이 식은 $n = 0$일 때도 성립한다.

소문항 (i)

곱의 미분법(product rule)과 $z' = -2xz$를 이용하여 위의 식을 미분하면

$$\frac{\mathrm{d}^{n+1} z}{\mathrm{d}x^{n+1}} = (-1)^n (y_n' z + y_n z') = (-1)^n (y_n' - 2x y_n) z.$$

그런데 n 대신 $n+1$을 넣은 같은 식에 따르면 좌변은 $(-1)^{n+1} y_{n+1} z$이다. 두 식을 같게 놓고 결코 0이 되지 않는 $(-1)^n z$로 나누면

$$y_n' - 2x y_n = -y_{n+1}, \qquad \text{즉} \qquad \frac{\mathrm{d}y_n}{\mathrm{d}x} = 2x y_n - y_{n+1},$$

이 되어 요구된 결과를 얻는다. 여기서는 $n \geq 1$이라는 조건이 전혀 필요하지 않았으므로 이 결과는 $n = 0$일 때도 성립한다. 이 사실은 아래에서 사용한다.

나중을 위해 적어 두면, $z' = -2xz$이고 $z'' = (4x^2 - 2)z$이므로 $y_1 = 2x$, $y_2 = 4x^2 - 2$이다.

소문항 (ii)

기저 단계(base case). $n = 1$일 때 $y_2 = 2xy_1 - 2y_0$이 필요한데, 실제로 $2x \cdot 2x - 2 = 4x^2 - 2 = y_2$이다.

귀납 단계(inductive step). 어떤 $k \geq 1$에 대하여

$$y_{k+1} = 2xy_k - 2ky_{k-1}. \qquad (*)$$

이 성립한다고 가정하자. 한 단계 더 나아간 같은 관계식을 얻고 싶으므로 $(*)$를 미분한다.

$$y'_{k+1} = 2y_k + 2xy'_k - 2ky'_{k-1}.$$

> **생각해 보기** 도함수들을 어떻게 없앨 수 있을까? 그리고 $k = 1$일 때 y_{k-1}에 소문항 (i)을 써도 될까?

모든 도함수를 소문항 (i)을 이용하여 바꾼다. $k = 1$일 때 y'_{k-1}에 대해서는 이것이 $n = 0$인 경우인데, 앞에서 이 경우도 성립함을 확인했다. 그러면

$$2xy_{k+1} - y_{k+2} = 2y_k + 2x(2xy_k - y_{k+1}) - 2k(2xy_{k-1} - y_k),$$

이므로

$$y_{k+2} = 4xy_{k+1} - 4x^2y_k - 2(k+1)y_k + 4kx\,y_{k-1}.$$

이다. y_{k-1}이 들어 있는 항은 가정 $(*)$를 한 번 더 써서 없앤다. $2ky_{k-1} = 2xy_k - y_{k+1}$이므로 $4kx\,y_{k-1} = 4x^2y_k - 2xy_{k+1}$이다. 이를 대입하면

$$\begin{aligned} y_{k+2} &= 4xy_{k+1} - 4x^2y_k - 2(k+1)y_k + 4x^2y_k - 2xy_{k+1} \\ &= 2xy_{k+1} - 2(k+1)y_k, \end{aligned}$$

이고, 이것은 k 대신 $k+1$을 넣은 관계식이다. 따라서 귀납법에 의하여 모든 $n \geq 1$에 대하여 $y_{n+1} = 2xy_n - 2ny_{n-1}$이다.

결론 유도. 점화식을 n에서 한 번, $n+1$에서 한 번, 모두 두 번 사용하여 두 곱 모두에 $2xy_ny_{n+1}$ 항이 나타나게 한다.

$$\begin{aligned} y_{n+1}^2 &= y_{n+1}(2xy_n - 2ny_{n-1}) = 2xy_ny_{n+1} - 2ny_{n-1}y_{n+1}, \\ y_ny_{n+2} &= y_n(2xy_{n+1} - 2(n+1)y_n) = 2xy_ny_{n+1} - 2(n+1)y_n^2. \end{aligned}$$

두 식을 빼면 x가 들어 있는 항이 소거된다.

$$y_{n+1}^2 - y_n y_{n+2} = 2(n+1)y_n^2 - 2n y_{n-1}y_{n+1} = 2n(y_n^2 - y_{n-1}y_{n+1}) + 2y_n^2,$$

이것이 요구된 항등식이다.

소문항 (iii)

$D_n = y_n^2 - y_{n-1}y_{n+1}$이라 하자. (ii)의 항등식은

$$D_{n+1} = 2nD_n + 2y_n^2 \qquad (n \geq 1).$$

이 된다. 모든 $n \geq 1$에 대하여 $D_n > 0$임을 귀납법으로 증명한다. $n = 1$일 때 모든 x에 대하여

$$D_1 = y_1^2 - y_0 y_2 = 4x^2 - (4x^2 - 2) = 2 > 0$$

이다. 어떤 $n \geq 1$에 대하여 $D_n > 0$이면 $n \geq 1$이므로 $2nD_n > 0$이고, $2y_n^2 \geq 0$이므로 $D_{n+1} > 0$이다. 따라서 모든 $n \geq 1$과 모든 실수 x에 대하여 $y_n^2 - y_{n-1}y_{n+1} > 0$이 되어 요구된 결과를 얻는다.

엄격한 부등식을 얻으려면 D_n이 엄격하게 양수여야 했다는 점에 주의하자. y_n^2만으로는 y_n의 영점에서 0이 될 수 있다.

검산

- 점화식으로부터 $y_3 = 2x(4x^2 - 2) - 4 \cdot 2x = 8x^3 - 12x$이다. $z'' = (4x^2 - 2)z$를 직접 미분하면 $z''' = (-8x^3 + 12x)z$이고, 이는 $-y_3 z$와 일치한다.
- $n = 1$일 때의 소문항 (i): $y_1' = 2$이고, $2x \cdot 2x - (4x^2 - 2) = 2$이다. ✓
- $n = 2$일 때의 소문항 (iii): $D_2 = (4x^2 - 2)^2 - 2x(8x^3 - 12x) = 8x^2 + 4$로 양수이며, 항등식이 예측하는 대로 $2D_1 + 2y_1^2 = 4 + 8x^2$와 같다.
- 점화식들과 부등식을 $n = 14$까지, 많은 유리수 x값(각 y_n의 영점 근처 포함)에서 컴퓨터로 확인한 결과 정확히 일치했다.

흔한 실수

- 귀납 단계에서 y_{k-1}에 대해 소문항 (i)을 사용하는데, $k = 1$일 때 이것이 y_0을 뜻한다는 점을 잊는 것. 소문항 (i)은 $n \geq 1$에 대해서만 요구되었으므로 $n = 0$인 경우를 따로 확인해야 한다.
- 소문항 (iii)에서 $D_{n+1} \geq 0$만 결론짓는 것. 엄격한 부등식은 y_n^2이 아니라 $D_n > 0$에서 나온다.

STEP 너머

함수 y_n은 에르미트(Hermite) 다항식(Hermite polynomials) $H_n(x)$이고, 관계식 $\mathrm{d}^n z/\mathrm{d}x^n = (-1)^n H_n z$는 이 다항식들의 로드리그 공식(Rodrigues formula)이다. 이 다항식들은 실수 전체에서 가중치(weight) e^{-x^2}에 대하여 직교(orthogonal)하며, 양자 조화 진동자(quantum harmonic oscillator)의 에너지 상태를 준다. (iii)의 부등식은 투란형 부등식(Turán-type inequality)으로, 여러 고전적인 직교 다항식에 대해 성립하는 결과들의 한 갈래이다. Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정식)에서는 급수해(series solutions)를 통해 에르미트 방정식을 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.