풀이

STEP III 2018, 문제 13

확률과 통계 • 푸아송 분포

> **STEP III 2018, 13번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/18-s3-q13

핵심 아이디어

확률생성함수(probability generating function)에 $t = -1$을 대입하면 각 확률에 부호 $(-1)^r$이 붙으므로, $G(1)$과 $G(-1)$의 평균을 내면 홀수 항은 상쇄되고 짝수 항만 남는다. 1의 네제곱근(fourth roots of unity) $1, -1, \mathrm{i}, -\mathrm{i}$로 같은 방식의 걸러내기를 하면 4의 배수인 항만 골라낼 수 있다. 새 생성함수를 각각 닫힌 형태(closed form)로 나타내고 나면 평균은 그저 $t = 1$에서의 도함수 값이며, 문제는 초등함수 사이의 비교가 된다.

풀이

$p_r = \mathrm{P}(X = r)$이라 두면 $G(t) = \sum_{r \geq 0} p_r t^r$이다.

짝수 값. $t = 1$과 $t = -1$에서의 급수를 더하면

$$G(1) + G(-1) = \sum_{r \geq 0} p_r (1 + (-1)^r) = 2 \sum_{r \text{ 짝수}} p_r,$$

이다. $1 + (-1)^r$은 짝수 r에 대해 2이고 홀수 r에 대해 0이기 때문이다. 양변을 2로 나누면 구하는 결과를 얻는다. ($\sum p_r = 1$이므로 두 급수는 모두 절대수렴(absolutely convergent)한다.)

푸아송(Poisson) 생성함수. $p_r = \mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^r / r!$일 때

$$G(t) = \mathrm{e}^{-\lambda} \sum_{r \geq 0} \frac{(\lambda t)^r}{r!} = \mathrm{e}^{-\lambda}\mathrm{e}^{\lambda t} = \mathrm{e}^{-\lambda(1-t)},$$

이다. 여기서 모든 t에 대해 수렴하는 지수함수의 급수를 이용하였다.

소문항 (i)

Y의 확률을 모두 더하면 1이어야 하므로, k는 $\mathrm{P}(X \text{ 짝수})$의 역수이다. 첫 번째 결과에 의해

$$\mathrm{P}(X \text{ 짝수}) = \tfrac{1}{2}(1+\mathrm{e}^{-2\lambda}) = \mathrm{e}^{-\lambda}\cdot\tfrac{1}{2}(\mathrm{e}^{\lambda}+\mathrm{e}^{-\lambda}) = \mathrm{e}^{-\lambda}\cosh\lambda, \qquad \text{따라서} \qquad k = \frac{\mathrm{e}^{\lambda}}{\cosh\lambda}.$$

Y의 생성함수는 G의 짝수 항만 남긴 것이다.

$$\begin{aligned} G_Y(t) = k\sum_{r\ \text{짝수}} p_r t^r &= k\cdot\tfrac{1}{2}(G(t)+G(-t)) \\ &= \frac{\mathrm{e}^{\lambda}}{\cosh\lambda}\cdot\mathrm{e}^{-\lambda}\cdot\tfrac{1}{2}(\mathrm{e}^{\lambda t}+\mathrm{e}^{-\lambda t}) = \frac{\cosh\lambda t}{\cosh\lambda}, \end{aligned}$$

여기서 $\frac{1}{2}(G(t)+G(-t))$는 G의 짝수 부분(even part)이며, 첫 번째 결과에서 1 대신 t를 넣은 것과 정확히 같다. 이것이 구하는 꼴이다.

평균은 $G_Y'(1)$이다.

$$\mathrm{E}(Y) = \frac{\lambda\sinh\lambda}{\cosh\lambda} = \lambda\tanh\lambda.$$

$\lambda > 0$이면 $\mathrm{e}^{-\lambda} > 0$이므로 $\sinh\lambda = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\lambda}-\mathrm{e}^{-\lambda}) < \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\lambda}+\mathrm{e}^{-\lambda}) = \cosh\lambda$이고, 따라서 $0 < \tanh\lambda < 1$이다. 그러므로 구하는 대로 $\mathrm{E}(Y) < \lambda$이다.

소문항 (ii)

이제 r이 4의 배수인 항만 남겨야 한다.

> ? **생각해 보기** 2가 아니라 4의 배수로 걸러내고 싶을 때, $t=-1$의 역할을 하는 것은 무엇인가?

1의 네제곱근 네 개를 모두 사용한다. 정수 r에 대해

$$1+(-1)^r+\mathrm{i}^r+(-\mathrm{i})^r = \begin{cases} 4 & \text{만약} 4 \mid r, \\ 0 & \text{그 외.} \end{cases}$$

$4 \mid r$이면 모든 항이 1이다. r이 홀수이면 $(-1)^r = -1$이고 $(-\mathrm{i})^r = -\mathrm{i}^r$이므로 항들이 둘씩 짝지어 상쇄된다. $r \equiv 2 \pmod 4$이면 항들은 $1+1-1-1=0$이다. 따라서

$$\sum_{4\mid r}\frac{x^r}{r!} = \tfrac{1}{4}(\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}) = \tfrac{1}{2}(\cosh x+\cos x).$$

(이는 직접 확인할 수도 있다. $\cosh x = \sum_{r\ \text{짝수}} x^r/r!$이고, $\cos x$는 같은 항들에 부호 $+,-,+,\ldots$가 차례로 붙은 것이므로, 둘을 더하면 $4 \mid r$인 항은 두 배가 되고 나머지는 상쇄된다.)

$x = \lambda t$로 두고 $\mathrm{e}^{-\lambda}$를 곱한 다음, $G_Z(1) = 1$이 되도록 c를 정하면

$$G_Z(t) = \frac{\cosh\lambda t+\cos\lambda t}{\cosh\lambda+\cos\lambda}.$$

을 얻는다. $\cosh\lambda > 1 \geq -\cos\lambda$이므로 $\lambda > 0$일 때 분모는 양수이다. 미분하고 $t = 1$을 대입하면

$$\mathrm{E}(Z) = G_Z'(1) = \frac{\lambda(\sinh\lambda - \sin\lambda)}{\cosh\lambda + \cos\lambda}.$$

이다. $\lambda > 0$이고 분모가 양수이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(Z) < \lambda &\iff \sinh\lambda - \sin\lambda < \cosh\lambda + \cos\lambda \\ &\iff \sin\lambda + \cos\lambda > \sinh\lambda - \cosh\lambda = -\mathrm{e}^{-\lambda} \\ &\iff \sin\lambda + \cos\lambda + \mathrm{e}^{-\lambda} > 0.\end{aligned}$$

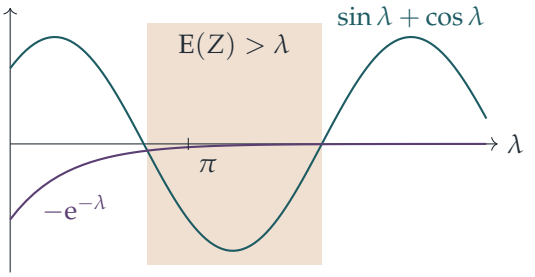
이 조건은 $\lambda = \pi$에서 성립하지 않는다. 이때 $\mathrm{e}^{-\pi} < 1$이므로 $\sin\pi + \cos\pi + \mathrm{e}^{-\pi} = -1 + \mathrm{e}^{-\pi} < 0$이다. 실제로 다음이 성립한다.

$$\mathrm{E}(Z)|_{\lambda=\pi} = \frac{\pi\sinh\pi}{\cosh\pi - 1} > \pi,$$

$\sinh\pi > \cosh\pi - 1$(동치로 $1 > \mathrm{e}^{-\pi}$)이기 때문이다.

따라서 답은 **아니오**이다. 즉 $\mathrm{E}(Z) < \lambda$는 모든 양수 λ에 대해 성립하지는 않는다.

더 자세히 살펴보기 위해 $\sin\lambda + \cos\lambda = \sqrt{2}\sin(\lambda + \frac{\pi}{4})$로 쓰자. 이 곡선이 $-\mathrm{e}^{-\lambda}$ 아래로 내려갈 때마다 조건이 성립하지 않는다. 그러한 첫 구간은 대략 $\lambda \approx 2.42$에서 $\lambda \approx 5.49$까지이고, 이후의 구간들은 $\mathrm{e}^{-\lambda} \to 0$이므로 점점 $(\frac{3\pi}{4} + 2n\pi,\ \frac{7\pi}{4} + 2n\pi)$에 가까워진다.



검산

- $\lambda \to 0$일 때 $\mathrm{E}(Y) = \lambda\tanh\lambda \approx \lambda^2$이다. 이는 타당하다. Y는 거의 항상 0이고, $\mathrm{P}(Y = 2) \approx \lambda^2/2$이기 때문이다.
- $\lambda \to \infty$일 때 $\tanh\lambda \to 1$이므로 $\mathrm{E}(Y)$는 λ보다 아주 조금 작다. λ가 크면 푸아송 분포가 넓게 퍼져 있으므로, 홀수 값을 버려도 평균은 거의 움직이지 않는다.
- 컴퓨터로 푸아송 급수를 직접 합하여 모든 생성함수와 두 평균을 확인하였다. 예를 들어 $\lambda = \pi$에서 $\mathrm{E}(Y) \approx 3.1299 < \pi$이고 $\mathrm{E}(Z) \approx 3.4254 > \pi$이다. 또한 $\sin\lambda + \cos\lambda + \mathrm{e}^{-\lambda}$의 부호가 바뀌는 지점이 $\lambda \approx 2.419$와 5.495임을 확인하였다.

흔한 실수

- 정규화 상수(normalising constant)를 빠뜨리는 것. $\cosh \lambda t$만으로는 생성함수가 아니다. $t = 1$에서의 값이 1이 아니기 때문이다.
- (i)과의 유추로 (ii)의 답도 반드시 "예"일 것이라고 가정하는 것. 4의 배수만 남기면 λ보다 아래쪽의 확률 질량(probability mass)이 위쪽보다 더 많이 제거될 수 있다. 예를 들어 $\lambda = \pi$일 때, 허용되는 가장 가까운 값 4는 π보다 크고 0보다 훨씬 무겁다.
- $\cosh \lambda + \cos \lambda$가 양수인지 확인하지 않고 부등식의 양변을 이것으로 나누는 것.

STEP 너머

한 잉여류(residue class)에 속하는 항만 골라내기 위해 생성함수를 1의 거듭제곱근(roots of unity)에 대해 평균하는 기법을 *1의 거듭제곱근 필터*(roots-of-unity filter) 또는 급수의 **다분할**(multisection)이라 한다. 이는 조합론의 기본 도구이며, 이산 푸리에 변환(discrete Fourier transform)의 가장 간단한 경우이다. 여기에서처럼 분포를 어떤 사건에 대해 조건부로 놓고 평균을 다시 계산하는 일은 확률론 전반에서 등장한다. Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문)은 생성함수를 깊이 있게 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.