풀이

STEP III 2018, 문제 11

역학 • 느슨한 줄과 포물체 운동

STEP III 2018, 11번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

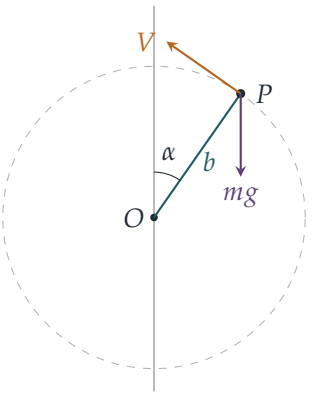
step.maths.org/questions/18-s3-q11

핵심 아이디어

실은 장력(tension)이 0으로 떨어지는 순간에 느슨해지므로, 그 순간의 지름 방향 운동 방정식(equation of motion)으로부터 V를 구할 수 있다. 그 뒤로 입자는 평범한 포물체(projectile)이며, 입자와 O 사이의 거리가 다시 b가 될 때 실이 다시 팽팽해진다. O를 중심으로 하는 좌표에서 계산하면 이 조건이 아름답게 간단해지는데, 포물체가 원 위에서 접선(tangent) 방향으로 움직이며 출발하기 때문이다. 마지막 부분은 결국 실이 갑자기 당겨지는(jerk) 순간의 속도가 실을 따라 정확히 향하는지의 문제이다.

풀이

입자를 가볍고 늘어나지 않는 실에 매달린 질량 m인 질점으로 모형화하고, 공기 저항은 없다고 한다. O를 원점으로 잡고, x축은 수평 방향, y축은 연직 위 방향으로 잡는다. 입자가 시계 반대 방향으로 돌아서 위쪽 연직선의 오른쪽에 있는 점 P에서 실이 느슨해진다고 하자.



P에서 실은 위쪽 연직선과 각 α를 이루므로 $P = (b\sin\alpha,\ b\cos\alpha)$이다. 이곳에서의 속도는 실에 수직이고 꼭대기를 넘어가는 위쪽 방향을 향한다.

$$\mathbf{v}_P = V(-\cos\alpha,\ \sin\alpha).$$

실이 느슨해질 때의 속력

실을 따라 O를 향하는 방향으로 힘을 분해한다. 장력 R는 O를 향해 작용하고, P가 O보다 위에 있으므로 무게의 성분 $mg\cos\alpha$도 O를 향한다. 입자는 반지름 b인 원 위를 움직이므로

$$R + mg\cos\alpha = \frac{mV^2}{b}.$$

$R = 0$일 때 실이 느슨해지므로

$$V^2 = gb\cos\alpha, \qquad V = \sqrt{gb\cos\alpha}.$$

실이 다시 팽팽해질 때

실이 느슨해지면 입자는 포물체가 된다. 시간 t가 지난 뒤 입자의 위치는

$$x = b\sin\alpha - Vt\cos\alpha, \qquad y = b\cos\alpha + Vt\sin\alpha - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

$x^2 + y^2 = b^2$일 때 실이 다시 팽팽해진다. 전개하면

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= b^2\sin^2\alpha - 2bVt\sin\alpha\cos\alpha + V^2t^2\cos^2\alpha \\ &\quad + b^2\cos^2\alpha + V^2t^2\sin^2\alpha + \tfrac{1}{4}g^2t^4 + 2bVt\sin\alpha\cos\alpha - bgt^2\cos\alpha - gVt^3\sin\alpha \\ &= b^2 + \left(V^2 - gb\cos\alpha\right)t^2 - gVt^3\sin\alpha + \tfrac{1}{4}g^2t^4. \end{aligned}$$

t에 관한 항들은 입자가 접선 방향으로 움직이며 출발하기 때문에 소거되고, t^2에 관한 항들은 $V^2 = gb\cos\alpha$이기 때문에 소거된다. 따라서

$$x^2 + y^2 - b^2 = gt^3\left(\tfrac{1}{4}gt - V\sin\alpha\right).$$

$0 < t < 4V\sin\alpha/g$에서는 이 값이 음수이므로 입자는 원의 엄밀한 내부에 있고 실은 느슨한 상태를 유지한다. 이 값은 다음을 만족하는 시각 T에 다시 0이 되고 (그 뒤로는 양수가 된다),

$$gT = 4V\sin\alpha,$$

이것이 구하려던 결과이다.

직전의 운동 방향

시각 T에서 속도 성분은

$$\dot{x} = -V\cos\alpha, \qquad \dot{y} = V\sin\alpha - gT = V\sin\alpha - 4V\sin\alpha = -3V\sin\alpha.$$

따라서 입자는 왼쪽 아래로 움직이고 있으며, 그 경로가 수평과 이루는 각 β는 다음을 만족한다.

$$\tan\beta = \frac{|\dot{y}|}{|\dot{x}|} = \frac{3V\sin\alpha}{V\cos\alpha} = 3\tan\alpha,$$

이것이 구하려던 결과이다.

정지하는 경우

? **생각해 보기** 입자가 그 자리에서 딱 멈추려면 속도에 대해 무엇이 성립해야 할까?

갑작스러운 당김은 운동량(momentum) 가운데 실 방향 성분만을 없앤다. 실에 수직인 성분은 그대로 남으므로, 입자가 정지할 필요충분조건은 그 수직 성분이 이미 0인 것이다. 즉 Q를 시각 T에서의 입자의 위치라 할 때, 직전의 속도가 실 $\overrightarrow{OQ}$에 평행한 것이 필요충분조건이다. ($\dot{x} = -V\cos\alpha \neq 0$이므로 속도는 0이 아니다.)

$V^2 = gb\cos\alpha$와 $T = 4V\sin\alpha/g$를 이용하면

$$x(T) = b\sin\alpha - \frac{4V^2\sin\alpha\cos\alpha}{g} = b\sin\alpha\,(1-4\cos^2\alpha),$$
$$y(T) = b\cos\alpha + \frac{4V^2\sin^2\alpha}{g} - \frac{8V^2\sin^2\alpha}{g} = b\cos\alpha\,(1-4\sin^2\alpha).$$

벡터 (x,y)와 $(\dot{x},\dot{y})$가 평행할 필요충분조건은 $x\dot{y} - y\dot{x} = 0$이다. $-bV$로 나누면

$$3\sin^2\alpha\,(1-4\cos^2\alpha) - \cos^2\alpha\,(1-4\sin^2\alpha) = 0.$$

$S = \sin^2\alpha$라 하면 $\cos^2\alpha = 1-S$이고 $1-4\cos^2\alpha = 4S-3$이므로

$$\begin{aligned} 3S(4S-3) - (1-S)(1-4S) &= 0 \\ 12S^2 - 9S - (1-5S+4S^2) &= 0 \\ 8S^2 - 4S - 1 &= 0, \end{aligned}$$

따라서 $S = \frac{1}{16}(4 \pm \sqrt{16+32}) = \frac{1}{4}(1\pm\sqrt{3})$이다. $S = \sin^2\alpha > 0$이므로 음의 근은 불가능하고, 남은 근은 $(0,1)$에 속하므로 실제로 존재하는 예각에 대응한다. 위의 모든 단계는 역으로도 성립하므로, 실이 팽팽해지는 순간 입자가 순간적으로 정지할 필요충분조건은

$$\sin^2\alpha = \frac{1+\sqrt{3}}{4}.$$

검산

- 식 $V^2 = gb\cos\alpha$에 따르면 $\alpha \to \frac{1}{2}\pi$일 때 $V \to 0$이다. 실이 O와 같은 높이에서 느슨해지려면 입자가 그곳에서 멈춰 있어야 하므로 이는 옳다.

- $\sin^2\alpha = \frac{1}{4}(1+\sqrt{3})$이면 $\alpha \approx 55.7°$이고 $\cos^2\alpha = \frac{1}{4}(3-\sqrt{3})$이므로 $Q = \big(b\sin\alpha\,(\sqrt{3}-2),\ -\sqrt{3}\,b\cos\alpha\big)$이며, 이 점은 O의 왼쪽 아래에 있다. OQ의 기울기는 $\sqrt{3}\cot\alpha/(2-\sqrt{3})$이고 경로의 기울기는 $3\tan\alpha$이다. 다음 식에 의해 두 값은 일치한다.

$$3(2-\sqrt{3})\tan^2\alpha = \frac{3(2-\sqrt{3})(1+\sqrt{3})}{3-\sqrt{3}} = \frac{3(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)} = \sqrt{3}.$$

  운동을 컴퓨터로 시뮬레이션해 보아도 세 결과가 모두 확인되었다.

흔한 실수

- 에너지만으로 V를 구하려는 것. 에너지는 V를 처음 속력과 연결해 줄 뿐이고, V를 b, g, α로 결정하는 것은 장력이 0이라는 조건이다.
- P에서의 속도 방향을 잘못 잡는 것. 속도는 OP에 수직이므로 연직선이 아니라 수평과 각 α를 이룬다.
- T가 실이 팽팽해지는 **첫** 시각임을 정당화하지 않는 것. 인수분해 $gt^3(\frac{1}{4}gt - V\sin\alpha)$가 그 사실을 보여 준다.

STEP 너머

실은 당길 수는 있지만 밀 수는 없으므로, 실이 느슨해지는 문제는 사실 구속 조건이 켜졌다 꺼졌다 하는 구속계(constrained system)이다. 이처럼 한쪽 방향으로만 작용하는 구속 조건이라는 같은 생각은 접촉 역학(contact mechanics)과 부등식 구속 조건을 갖는 라그랑주 역학(Lagrangian mechanics)에서도 나타난다. 갑작스러운 당김은 충격적 구속력(impulsive constraint force)이며, 대학 1학년 과정에서 충돌 및 반발 계수(coefficient of restitution)와 함께 다룬다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 원운동과 충격량을 모두 꼼꼼하게 전개한다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.