풀이

STEP III 2018, 문제 10

역학 • 복합 진자

> **STEP III 2018, 10번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/18-s3-q10

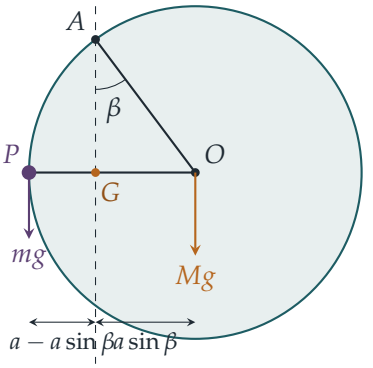
핵심 아이디어

원판과 입자는 함께 하나의 강체(rigid body)를 이루어 고정축 L을 중심으로 회전하므로, 모든 것이 하나의 각으로 결정된다. 평형(equilibrium) 상태에서는 전체의 질량중심(centre of mass)이 A의 바로 아래에 있어야 하며, 이것은 A에 대한 모멘트(moment)의 균형이다. 운동에 대해서는, 축이 매끄러워 그곳의 반력이 일을 하지 않으므로 에너지가 보존된다. 에너지를 θ와 $\dot{\theta}$의 함수로 쓰고 나면, 이를 미분하여 운동방정식(equation of motion)을 얻고, $\sin\theta$를 θ로 바꾸면 미소 진동(small oscillations)이 바로 따라 나온다.

풀이

원판은 균일한 강체 박판(lamina)으로, 입자는 원판의 가장자리에 고정된 질점(point mass)으로, 축 L은 매끄러운 것으로 모형화한다.

평형. A에 대한 모멘트를 갖는 힘은 두 무게뿐이다. 하나는 O에 작용하는 Mg이고, 다른 하나는 P에 작용하는 mg이다. A에서의 반력은 A를 지난다. AO가 연직 아래 방향과 각 β를 이루므로, O는 A의 한쪽, 예를 들어 오른쪽으로 수평 거리 $a\sin\beta$만큼 떨어져 있다. 그러면 무게 Mg는 원판을 A에 대하여 시계 방향으로 돌리고, 이를 상쇄할 수 있는 것은 mg뿐이므로 P는 A를 지나는 연직선의 **왼쪽**에 있어야 한다. OP는 수평이고 길이가 a이므로, P가 A의 왼쪽으로 떨어진 수평 거리는 $a - a\sin\beta$이다. (여기서 $a\sin\beta < a$이므로 P는 실제로 연직선의 왼쪽에 있다.)



A에 대한 모멘트를 취하면

$$Mg\,a\sin\beta = mg\,(a - a\sin\beta) \quad\Longrightarrow\quad \sin\beta = \frac{m}{M+m}.$$

O와 P는 모두 A보다 연직 거리 $a\cos\beta$만큼 아래에 있다. 따라서 AP를 빗변으로 하는 삼각형에서 수평 변은 $a(1-\sin\beta)$이고 연직 변은 $a\cos\beta$이다.

$$\begin{aligned} AP^2 &= a^2(1-\sin\beta)^2 + a^2\cos^2\beta = a^2\big(2-2\sin\beta\big) \\ &= 2a^2\Big(1-\frac{m}{M+m}\Big) = \frac{2Ma^2}{M+m}, \end{aligned}$$

그러므로 요구한 대로 $AP/a = \sqrt{2M/(M+m)}$이다.

전체의 질량중심 G가 어디에 있는지 짚어 둘 만하다. 이 점은 O와 P의 가중평균이므로 선분 OP 위에 있고, 따라서 A보다 깊이 $a\cos\beta$만큼 아래에 있다. 평형 상태에서 이 점은 A의 바로 아래에 있으므로

$$AG = a\cos\beta.$$

에너지 보존. 원판과 입자는 하나의 강체로 움직인다. 평형 상태에서 OP는 수평이고, OP는 물체와 함께 회전하므로, OP가 수평과 각 θ를 이룰 때 물체 전체는 평형 위치에서 θ만큼 회전한 것이다. 따라서 각속도(angular speed)의 크기는 $|\dot\theta|$이다.

? 생각해 보기 입자는 얼마나 빠르게 움직이고 있는가?

물체의 모든 점은 축을 중심으로 하는 원 위를 움직인다. 입자는 A로부터 일정한 거리 AP를 유지하므로, 그 속력은 $AP\,|\dot\theta|$이고 운동 에너지(kinetic energy)는

$$\tfrac{1}{2}m\,AP^2\,\dot\theta^2 = \tfrac{1}{2}m\cdot 2a^2(1-\sin\beta)\,\dot\theta^2 = (1-\sin\beta)\,ma^2\dot\theta^2,$$

이다. 여기서 위에서 구한 $AP^2 = 2a^2(1-\sin\beta)$를 이용하였다. 원판의 운동 에너지는 $\frac{1}{2}I\dot\theta^2$이다.

위치 에너지(potential energy)를 구할 때는 전체 질량 $M+m$이 G에 모여 있다고 보면 된다. 직선 AG는 평형 상태에서 연직이고, 이것 역시 θ만큼 회전하였으므로, 이제 G는 A보다 깊이 $a\cos\beta\cos\theta$만큼 아래에 있다. 평형 위치를 기준으로 위치 에너지를 재면

$$\text{위치 에너지} = (M+m)g\big(a\cos\beta - a\cos\beta\cos\theta\big) = (M+m)ga\cos\beta\,(1-\cos\theta).$$

축은 매끄럽고 A에서의 반력은 움직이지 않는 점에 작용하므로 일을 하지 않는다. 그 밖의 힘은 중력뿐이며, 중력은 보존력(conservative force)이다. 따라서 운동 에너지와 위치 에너지의 합은 일정하다.

$$\tfrac{1}{2}I\dot\theta^2 + (1-\sin\beta)\,ma^2\dot\theta^2 + (m+M)ga\cos\beta\,(1-\cos\theta) = \text{상수},$$

이것이 요구한 결과이다.

미소 진동. t에 대하여 미분하면

$$\dot\theta\Big[\big(I+2(1-\sin\beta)ma^2\big)\ddot\theta + (M+m)ga\cos\beta\,\sin\theta\Big] = 0.$$

$\dot\theta \neq 0$일 때마다 괄호 안은 0이어야 하고, 연속성에 의해 모든 순간에 0이다. θ가 작을 때 $\sin\theta \approx \theta$이므로

$$\ddot\theta = -\omega^2\theta, \qquad \omega^2 = \frac{(M+m)ga\cos\beta}{I+2(1-\sin\beta)ma^2},$$

이것은 주기(period)가 $2\pi/\omega$인 단진동(simple harmonic motion)이다.

이제 $m=\frac{3}{2}M$으로 놓자. 그러면 $\sin\beta = \dfrac{3/2}{5/2} = \frac{3}{5}$이고, β가 예각이므로 $\cos\beta = \frac{4}{5}$이다. 분자는

$$\tfrac{5}{2}M\cdot ga\cdot\tfrac{4}{5} = 2Mga,$$

이고, $I=\frac{3}{2}Ma^2$이므로 분모는

$$\tfrac{3}{2}Ma^2 + 2\cdot\tfrac{2}{5}\cdot\tfrac{3}{2}Ma^2 = \tfrac{3}{2}Ma^2 + \tfrac{6}{5}Ma^2 = \tfrac{27}{10}Ma^2.$$

따라서 $\omega^2 = \dfrac{20g}{27a}$이고, 주기는

$$\frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{27a}{20g}} = 2\pi\cdot\frac{3}{2}\sqrt{\frac{3a}{5g}} = 3\pi\sqrt{\frac{3a}{5g}},$$

이다. 여기서 $\sqrt{27/20} = \sqrt{9\cdot 3/(4\cdot 5)} = \frac{3}{2}\sqrt{3/5}$를 이용하였다. 이것이 요구한 주기이다.

검산

- $m=0$이면 $\sin\beta=0$이고 $AP/a=\sqrt{2}$이다. 원판은 O가 A 아래에 오도록 매달리고, O와 같은 높이에 있는 가장자리의 점은 실제로 A로부터 $\sqrt{2}\,a$만큼 떨어져 있다. 주기는

$2\pi\sqrt{(3a/2)/g}$가 되는데, 이것은 가장자리를 회전축으로 하는 원판에 대해 잘 알려진 결과이다.

- 운동 에너지 항들을 더하면 $\frac{1}{2}(I + m\,AP^2)\dot{\theta}^2$이 되는데, 이는 당연히 그래야 하듯이 L에 대한 물체 전체의 관성 모멘트(moment of inertia)를 담고 있다.
- $m = \frac{3}{2}M$, $a = 0.5\,\text{m}$로 강체를 단계별 컴퓨터 시뮬레이션으로 계산하였더니 미소 진동의 주기가 $1.64815\,\text{s}$로 나왔다. 공식으로는 $3\pi\sqrt{1.5/49.05} \approx 1.64815\,\text{s}$이다. 시뮬레이션은 또한 크게 흔들릴 때에도 에너지 식이 일정하게 유지됨을 보여 주었다.

흔한 실수

- P를 연직선에 대하여 O와 같은 쪽에 놓는 것. 그러면 두 무게가 물체를 같은 방향으로 돌리므로 평형이 있을 수 없다.
- 입자와 축 사이의 거리로 AP 대신 a를 쓰는 것. 입자는 O가 아니라 A를 중심으로 하는 원 위를 움직인다.
- O와 P의 위치 에너지를 따로 구하다가 삼각함수 계산에서 길을 잃는 것. A로부터 거리 $a\cos\beta$에 있는 전체의 질량중심 G를 이용하는 편이 훨씬 깔끔하다.

STEP 너머

이것은 **복합 진자**(*compound pendulum*)이다. 고정축을 중심으로 흔들리는 강체는 모두 길이가 $I_{\text{total}}/\big((M+m)h\big)$인 단진자처럼 진동한다. 여기서 h는 축에서 질량중심까지의 거리이다. 우리가 쓴 에너지 방법은 라그랑주 역학(Lagrangian mechanics)의 한 변수 경우로, 라그랑주 역학에서는 하나의 일반화 좌표(generalised coordinate)로 쓴 운동 에너지와 위치 에너지로부터 운동방정식을 얻는다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 강체의 회전과 물리 진자(physical pendulum)를 꼼꼼하게 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.