풀이

STEP III 2018, 문제 1

순수수학 • 이차방정식의 근과 부등식

> **STEP III 2018, 1번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/18-s3-q1

핵심 아이디어

비에트 공식(Vieta's formulas)을 쓰면 u와 v에 대한 두 대칭식(symmetric expression)이 모두 계수(coefficient) α와 β의 간단한 함수로 바뀐다. 한 식의 값을 고정하면 α를 소거할 수 있고, 다른 식은 β만의 함수가 된다. 이 함수가 바로 소문항 (i)에서 그린 두 함수 중 하나이다. 그다음 u와 v가 실수라는 조건(판별식(discriminant) ≥ 0)이 곡선의 어느 구간을 써도 되는지 알려 주고, 나머지는 그래프가 해결해 준다.

풀이

소문항 (i)

곡선 $y = \mathrm{f}(\beta)$**.** 미분하면

$$\mathrm{f}'(\beta) = 1 + \frac{1}{\beta^2} + \frac{2}{\beta^3} = \frac{\beta^3 + \beta + 2}{\beta^3} = \frac{(\beta+1)(\beta^2 - \beta + 2)}{\beta^3},$$

이다. 여기서 삼차식(cubic)의 근 $\beta = -1$을 찾아 인수분해하였다. 이차 인수의 판별식은 $1 - 8 < 0$이므로 이 인수는 항상 양수이다. 따라서 정상점(stationary point)은 $\beta = -1$ 하나뿐이고, 이때

$$\mathrm{f}(-1) = -1 + 1 - 1 = -1.$$

이다. 부호를 살펴보자. $-1 < \beta < 0$이면 분자는 양수이고 $\beta^3 < 0$이므로 $\mathrm{f}' < 0$이다. $\beta < -1$이면 둘 다 음수이므로 $\mathrm{f}' > 0$이다. 그러므로 $(-1, -1)$은 **극대점**(*maximum*)이고, 모든 $\beta < 0$에 대하여 $\mathrm{f}(\beta) \leq -1$이다. $\beta > 0$에서는 모든 항이 양수이므로 f는 그 구간에서 증가한다.

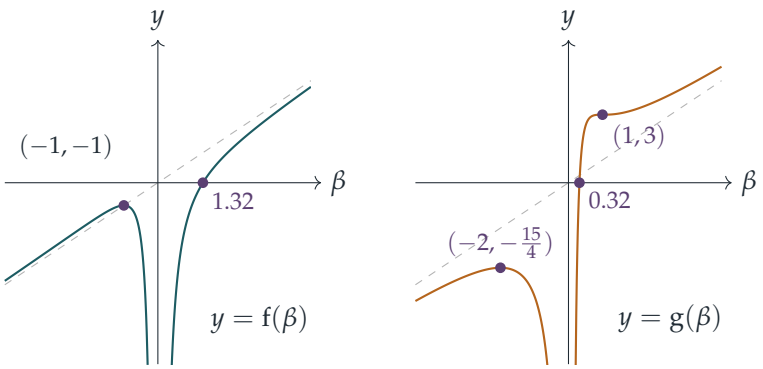
양 끝에서의 거동: $\beta \to 0$일 때 어느 쪽에서 다가가든 $-1/\beta^2$ 항이 지배하므로 $\mathrm{f} \to -\infty$이

다. $\beta \to \pm\infty$일 때 $f(\beta) - \beta \to 0$이므로 $y = \beta$는 사선 점근선(oblique asymptote)이다. 곡선은 $\beta^3 - \beta - 1 = 0$인 곳, 즉 $\beta \approx 1.32$에서 축과 한 번 만난다.

곡선 $y = g(\beta)$**.** 마찬가지로

$$g'(\beta) = 1 - \frac{3}{\beta^2} + \frac{2}{\beta^3} = \frac{\beta^3 - 3\beta + 2}{\beta^3} = \frac{(\beta-1)^2(\beta+2)}{\beta^3}.$$

이다. 정상점은 $\beta = -2$에서 $g(-2) = -2 - \frac{3}{2} - \frac{1}{4} = -\frac{15}{4}$이고, $\beta = 1$에서 $g(1) = 3$이다. $-2 < \beta < 0$이면 $g' < 0$이고, $\beta < -2$이면 $g' > 0$이므로 $(-2, -\frac{15}{4})$는 극대점이며 모든 $\beta < 0$에 대하여 $g(\beta) \le -\frac{15}{4}$이다. $\beta > 0$이면 $g' \ge 0$이고 등호는 $\beta = 1$에서만 성립한다. 이 점에서 도함수(derivative)의 부호가 바뀌지 않으므로 $(1, 3)$은 정상 변곡점(stationary point of inflection)이고, g는 $\beta > 0$에서 증가한다. 이번에도 $\beta \to 0$일 때 $g \to -\infty$이고, $y = \beta$가 점근선이며, 영점은 $\beta \approx 0.32$($\beta^3 + 3\beta - 1 = 0$의 근) 하나이다.



점선은 점근선 $y = \beta$이다.

소문항 (ii)

비에트 공식에 의하여 $u + v = -\alpha$, $uv = \beta$이다($\beta \neq 0$이므로 $uv \neq 0$이다). 따라서

$$u + v + \frac{1}{uv} = -\alpha + \frac{1}{\beta}, \qquad \frac{1}{u} + \frac{1}{v} + uv = \frac{u+v}{uv} + uv = \beta - \frac{\alpha}{\beta}.$$

소문항 (iii)

조건 $-\alpha + \frac{1}{\beta} = -1$에서 $\alpha = 1 + \frac{1}{\beta}$이다. 이를 두 번째 식에 대입하면

$$\frac{1}{u} + \frac{1}{v} + uv = \beta - \frac{1}{\beta}\left(1 + \frac{1}{\beta}\right) = \beta - \frac{1}{\beta} - \frac{1}{\beta^2} = f(\beta).$$

이다. 그러므로 **허용되는** 모든 β에 대하여 $f(\beta) \le -1$임을 보이면 된다.

생각해 보기 곡선 $y = \mathrm{f}(\beta)$는 $+\infty$로 올라가므로, 이 부등식이 모든 β에 대해 성립할 수는 없다. 무엇이 β가 커지는 것을 막는가?

바로 u와 v가 실수라는 조건이다. 두 근이 실수일 필요충분조건은 $\alpha^2 \geq 4\beta$, 즉

$$\left(1+\frac{1}{\beta}\right)^2 \geq 4\beta \iff (\beta+1)^2 \geq 4\beta^3 \iff 4\beta^3-\beta^2-2\beta-1 \leq 0,$$

이다. 여기서 양변에 $\beta^2 > 0$을 곱하였다. 이제 $\beta = 1$은 이 삼차식의 근이고,

$$4\beta^3-\beta^2-2\beta-1 = (\beta-1)(4\beta^2+3\beta+1).$$

이다. 이차 인수의 판별식은 $9-16<0$이므로 이 인수는 항상 양수이다. 따라서 두 근이 실수일 필요충분조건은 $\beta \leq 1 (\beta \neq 0)$이다.

- $\beta < 0$이면: 소문항 (i)에 의하여 $\mathrm{f}(\beta) \leq \mathrm{f}(-1) = -1$이다.
- $0 < \beta \leq 1$이면: f는 $\beta > 0$에서 증가하므로 $\mathrm{f}(\beta) \leq \mathrm{f}(1) = 1-1-1 = -1$이다.

어느 경우든 $\frac{1}{u}+\frac{1}{v}+uv \leq -1$이므로 원하는 결과가 증명되었다. 등호는 $\beta = -1 (\alpha = 0$, 근은 $\pm 1)$일 때와 $\beta = 1 (\alpha = 2$, 중근(double root) $-1)$일 때 성립한다.

소문항 (iv)

이번에는 $-\alpha+\frac{1}{\beta} = 3$이므로 $\alpha = \frac{1}{\beta}-3$이고

$$\frac{1}{u}+\frac{1}{v}+uv = \beta-\frac{1}{\beta}\left(\frac{1}{\beta}-3\right) = \beta+\frac{3}{\beta}-\frac{1}{\beta^2} = \mathrm{g}(\beta).$$

이다. 두 근이 실수일 조건은 $\alpha^2 \geq 4\beta$이다.

$$\left(\frac{1}{\beta}-3\right)^2 \geq 4\beta \iff (1-3\beta)^2 \geq 4\beta^3 \iff 4\beta^3-9\beta^2+6\beta-1 \leq 0.$$

이번에도 $\beta = 1$이 근인데, 이번에는 중근이다.

$$4\beta^3-9\beta^2+6\beta-1 = (\beta-1)(4\beta^2-5\beta+1) = (\beta-1)^2(4\beta-1).$$

$(\beta-1)^2 \geq 0$이므로 이 삼차식이 ≤ 0일 필요충분조건은 $\beta \leq \frac{1}{4}$ 또는 $\beta = 1$이다. 따라서 허용되는 값은 $\beta < 0, 0 < \beta \leq \frac{1}{4}$, 그리고 고립된 값 $\beta = 1$이다.

생각해 보기 최댓값은 그냥 구간의 오른쪽 끝에서의 값 $\mathrm{g}(\frac{1}{4})$일까?

그렇지 않다. 고립점(isolated point)을 놓치지 말아야 한다. 세 부분을 각각 살펴보면 다음과 같다.

- $\beta < 0$: 소문항 (i)에 의하여 $g(\beta) \leq -\frac{15}{4}$이다.
- $0 < \beta \leq \frac{1}{4}$: g는 증가하므로 $g(\beta) \leq g(\frac{1}{4}) = \frac{1}{4} + 12 - 16 = -\frac{15}{4}$이다.
- $\beta = 1$: $g(1) = 3$이다.

그러므로 $\frac{1}{u} + \frac{1}{v} + uv$의 최댓값은 $\boxed{3}$이고, 이는 $\beta = 1$, $\alpha = -2$, 즉 $u = v = 1$일 때 얻어진다. (실제로 두 식 모두 $1 + 1 + 1 = 3$이다.) 이 중근이 없었다면 $-\frac{15}{4}$보다 큰 값은 불가능했을 것이다.

검산

- 두 식에 $u = v = 1$을 대입하면 각각 3이 되어 소문항 (iv)와 일치한다. $u = v = -1$을 대입하면 각각 -1이 되는데, 이는 소문항 (iii)의 등호 경우이다.
- 소문항 (iv)에서 $\beta = \frac{1}{4}$를 넣어 보자. $\alpha = 1$이고 $x^2 + x + \frac{1}{4} = (x + \frac{1}{2})^2$이므로 $u = v = -\frac{1}{2}$이다. 그러면 $u + v + \frac{1}{uv} = -1 + 4 = 3$이고 $\frac{1}{u} + \frac{1}{v} + uv = -4 + \frac{1}{4} = -\frac{15}{4}$로, 앞의 주장과 일치한다.
- 실근을 주는 무작위 β 수천 개를 컴퓨터로 조사한 결과, 소문항 (iii)에서는 -1보다 큰 값이 없었고, 소문항 (iv)에서는 $\beta = 1$을 제외하면 -3.75보다 큰 값이 없었다.

흔한 실수

- 판별식 조건을 잊어버리고, 소문항 (iii)에서 상계가 없다고 결론짓는 실수.
- $(\beta - 1)^2(4\beta - 1) \leq 0$의 해를 $\beta \leq \frac{1}{4}$로만 구하고 $\beta = 1$을 놓쳐서, 답을 3 대신 $-\frac{15}{4}$로 쓰는 실수.
- 부등식 $\alpha^2 \geq 4\beta$에 β^2이 아니라 (음수일 수도 있는) β를 곱하는 실수.

STEP 너머

이 문제는 작은 제약 최적화(constrained optimisation) 문제이다. 실근을 주는 계수들의 집합 위에서 함수를 최대화하는데, 이 집합에는 구간뿐 아니라 고립점도 포함될 수 있다. 집합 위에서 함수의 최댓값이 반드시 정상점이나 구간의 끝점에서 나타나는 것은 아니다. 그래서 해석학과 최적화에서는 허용 집합(feasible set)을 정확하게 기술하는 일이 매우 중요하다. Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 입문서)는 일반적인 집합 위에서 연속함수(continuous function)의 극값을 꼼꼼하게 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.