풀이

STEP II 2018, 문제 9

역학 • 중력 아래에서의 충돌

> **STEP II 2018, 9번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/18-s2-q9

핵심 아이디어

두 구슬(bead)은 언제나 아래쪽으로 같은 가속도(acceleration) g를 가지므로, 서로에 대해 **상대적으로**(relative) 보면 일정한 속도로 움직인다. A가 튀어 오른 뒤에는 두 구슬 사이의 간격이 일정한 빠르기로 줄어들므로, 충돌까지 걸리는 시간이 곧바로 나온다. 마지막 부분은 순전히 에너지와 운동량의 문제이다. A가 지면에 닿을 때의 속력을 알면 충돌 직후 A가 얼마나 빠르게 움직였는지 알 수 있고, 나머지는 뉴턴(Newton)의 실험 법칙(Newton's experimental law)이 해결해 준다.

풀이

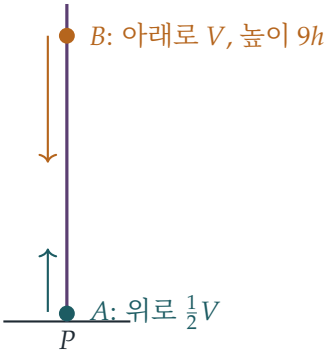
두 구슬을 매끄러운 연직 철사 위에 있는 질량 m의 같은 입자로 모형화하고 공기 저항은 없다고 하자. 그러면 충돌과 충돌 사이에 각 구슬은 중력만 받으며 자유롭게 움직인다. 위쪽을 양의 방향으로 하고 높이는 P에서부터 잰다.

첫 번째 튀어 오름까지

A는 정지 상태에서 $8h$만큼 떨어지므로, 에너지 보존(conservation of energy)에 의해

$$V^2 = 2g(8h) = 16gh, \qquad V = 4\sqrt{gh}.$$

같은 시간 동안 B 역시 정지 상태에서 $8h$만큼 떨어졌으므로(운동이 똑같다), 이 순간 B는 높이 $17h - 8h = 9h$에 있으며 속력 V로 아래로 움직이고 있다. A는 지면에서 위쪽으로 속력 $\frac{1}{2}V$로 튀어 오른다.



충돌

A가 지면을 떠나는 순간부터 두 구슬은 모두 가속도 $-g$로 움직이므로, B의 A에 대한 상대 속도는 처음 값

$$(-V) - \tfrac{1}{2}V = -\tfrac{3}{2}V$$

에 그대로 머문다.

생각해 보기 두 구슬이 언제 만나는지 구할 때 왜 중력을 무시해도 될까?

중력은 두 속도를 똑같이 $-gt$만큼 바꾸므로, 그 차에서는 상쇄된다. 따라서 $9h$의 간격은 일정한 속력 $\frac{3}{2}V$로 줄어들고, 충돌은 튀어 오른 뒤

$$\tau = \frac{9h}{\frac{3}{2}V} = \frac{6h}{V} = \frac{6h}{4\sqrt{gh}} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{h}{g}}$$

만큼의 시간이 지나서 일어난다. (그때 A가 아직 공중에 있어야 하는데, 실제로 그렇다는 것을 곧 확인한다.) 그때 A의 높이는

$$H = \tfrac{1}{2}V\tau - \tfrac{1}{2}g\tau^2 = 2\sqrt{gh}\cdot\frac{3}{2}\sqrt{\frac{h}{g}} - \frac{1}{2}g\cdot\frac{9h}{4g} = 3h - \frac{9}{8}h = \frac{15}{8}h$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다. 충돌 직전에는

$$\text{속도: } A = \tfrac{1}{2}V - g\tau = 2\sqrt{gh} - \tfrac{3}{2}\sqrt{gh} = \tfrac{1}{2}\sqrt{gh},$$
$$\text{속도: } B = -V - g\tau = -4\sqrt{gh} - \tfrac{3}{2}\sqrt{gh} = -\tfrac{11}{2}\sqrt{gh}.$$

따라서 A는 아직 올라가는 중이며,

$$u_A = \tfrac{1}{2}\sqrt{gh}\ (\text{위쪽}), \qquad u_B = \tfrac{11}{2}\sqrt{gh}\ (\text{아래쪽}).$$

검산 삼아 계산해 보면, B의 높이도 $9h - V\tau - \frac{1}{2}g\tau^2 = 9h - 6h - \frac{9}{8}h = \frac{15}{8}h$이다.

반발 계수

구슬 사이의 반발 계수(coefficient of restitution)를 e라 하고, 충돌 직후 두 구슬의 속도(위쪽이 양)를 각각 v_A, v_B라 하자. 잠시 $\sqrt{gh}$를 단위로 하여 계산하면, $u_A = \frac{1}{2}$는 위쪽, $u_B = \frac{11}{2}$는 아래쪽이다.

운동량(momentum) (질량이 같고, 순간적인 충돌 동안 중력이 주는 충격량(impulse)은 무시할 수 있다):

$$v_A + v_B = \tfrac{1}{2} - \tfrac{11}{2} = -5.$$

뉴턴의 실험 법칙: 두 구슬은 속력 $\frac{1}{2} + \frac{11}{2} = 6$으로 가까워지고, 충돌 후 위에 있는 B는 그 e배의 속력으로 A에서 멀어진다:

$$v_B - v_A = 6e.$$

두 식을 빼면 $v_A = -\frac{1}{2}(5+6e)$이므로, A는 속력 $w = \frac{1}{2}(5+6e)\sqrt{gh}$로 **아래쪽으로** 움직인다.

이제 A는 높이 $\frac{15}{8}h$에서 처음 속력 w로 떨어져 속력 V로 지면에 닿는다. (이 구슬은 B보다 아래에 있으면서 더 빠르게 아래로 움직이므로, 즉 $v_B = -5 - v_A = \frac{1}{2}(6e-5) > v_A$이므로, 그 전에 두 구슬이 다시 만나지는 않는다.) 에너지에 의해

$$V^2 = w^2 + 2g \cdot \tfrac{15}{8}h \quad \Longrightarrow \quad w^2 = 16gh - \tfrac{15}{4}gh = \tfrac{49}{4}gh,$$

이므로 $w = \frac{7}{2}\sqrt{gh}$이다. 그러면 $\frac{1}{2}(5+6e) = \frac{7}{2}$이고, 따라서

$$e = \frac{1}{3}.$$

충돌 후 A는 $\frac{7}{2}\sqrt{gh}$로, B는 $\frac{3}{2}\sqrt{gh}$로 아래로 움직인다.

검산

- 운동 에너지(kinetic energy): 충돌 전 전체 운동 에너지는 $\frac{1}{2}m\,gh\,(\frac{1}{4} + \frac{121}{4}) = \frac{61}{4}mgh$이고, 충돌 후에는 $\frac{1}{2}m\,gh\,(\frac{49}{4} + \frac{9}{4}) = \frac{29}{4}mgh$이다. $e < 1$이므로 당연히 에너지가 손실된다.
- $e = 1$이면 (질량이 같으므로) 두 구슬은 속도를 그대로 맞바꾸게 되어, A는 $\frac{11}{2}\sqrt{gh}$로 떠나 V보다 빠르게 지면에 닿을 것이다. $e = 0$이면 두 구슬이 함께 $\frac{5}{2}\sqrt{gh}$로 움직여 A는 더 느리게 지면에 닿을 것이다. $\frac{1}{3}$이라는 값은 그 사이에 적절히 놓여 있다.
- 컴퓨터로 전체 운동을 단계별로 시뮬레이션해 보면($g = h = 1$로 두고) 높이 1.875에서 속력 0.5와 5.5로 충돌이 일어나고, $e = \frac{1}{3}$일 때 두 번째로 지면에 닿는 속력은 $4 = V$가 된다.

흔한 실수

- A가 떨어지는 동안 B도 떨어지고 있었다는 사실을 잊는 것: 튀어 오르는 순간 B는 $17h$가 아니라 $9h$에 있으며, 이미 속력 V로 움직이고 있다.
- 뉴턴의 법칙에서 부호를 틀리는 것: 속도를 한 가지 양의 방향을 기준으로 쓰고, 멀어지는 속력이 양수로 나오는지 확인하자.

STEP 너머

떨어지는 구슬 하나의 좌표계에서 생각하는 요령은 갈릴레이 상대성(Galilean relativity)을 처음 맛보는 것이다. 균일한 중력장에서 자유 낙하하는 좌표계에서는 중력이 전혀 보이지 않으며, 이것이 아인슈타인(Einstein)의 등가 원리(equivalence principle)의 출발점이다. 대학 1학년 역학의 충돌 문제는 흔히 질량 중심 좌표계(centre-of-mass frame)에서 푸는데, 이 좌표계에서는 반발 계수가 e인 충돌이 두 속도의 방향을 뒤집고 크기를 e배로 바꿀 뿐이다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 이 두 가지 아이디어를 모두 꼼꼼하게 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.