풀이

STEP II 2018, 문제 8

순수수학 • 베르누이 미분방정식

> **STEP II 2018, 8번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/18-s2-q8

핵심 아이디어

두 방정식은 모두 베르누이 방정식(Bernoulli equation)이다. 우변에 있는 y의 거듭제곱 때문에 선형(linear)이 깨지지만, y의 적절한 거듭제곱을 새 변수로 잡으면 방정식이 선형이 된다. $y = v^2$ (또는 $y = v^3$)로 놓으면 공통인수 v (또는 v^2)가 약분되고, 남는 것은 상수 계수(constant coefficients)를 갖는 일계 선형 방정식(first-order linear equation)이다. 이것은 적분인자(integrating factor)나 변수분리(separating variables)로 풀 수 있다. 그래프를 그릴 때 두 곡선을 비교하는 가장 깔끔한 방법은 둘 다 하나의 지수함수 $u = e^{-t/6}$로 나타내는 것이다.

풀이

문제에서는 $y_1(x)$, $y_2(x)$라고 쓰지만 독립변수(independent variable)는 처음부터 끝까지 t이므로 $y_1(t)$, $y_2(t)$로 쓴다.

소문항 (i)

$v = \sqrt{y} \geq 0$으로 하여 $y = v^2$으로 놓는다. 그러면 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 2v\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$이고 $y^{1/2} = v$이므로 방정식은 다음과 같이 된다.

$$2v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \alpha v - \beta v^2.$$

한 가지 해는 $v \equiv 0$, 즉 상수해 $y \equiv 0$이다. $v \neq 0$인 곳에서는 v로 나눌 수 있다.

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{\beta}{2}v = \frac{\alpha}{2}.$$

이것은 적분인자가 $e^{\beta t/2}$인 선형 방정식이다.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(ve^{\beta t/2}\right) = \frac{\alpha}{2}e^{\beta t/2} \quad \Longrightarrow \quad ve^{\beta t/2} = \frac{\alpha}{\beta}e^{\beta t/2} + C.$$

따라서 일반해(general solution)는 상수 C에 대하여

$$\sqrt{y} = \frac{\alpha}{\beta} + Ce^{-\beta t/2}, \qquad \text{즉} \qquad y = \left(\frac{\alpha}{\beta} + Ce^{-\beta t/2}\right)^2,$$

이고 (단, $v = \sqrt{y} \geq 0$이므로 괄호 안이 음이 아닌 범위에서), 여기에 상수해 $y \equiv 0$이 더해진다. $C = 0$으로 잡으면 또 다른 상수해 $y \equiv \alpha^2/\beta^2$을 얻는다.

$y_1(0) = 0$이려면 $v(0) = 0$이어야 하므로 $C = -\alpha/\beta$이고,

$$\boxed{y_1(t) = \frac{\alpha^2}{\beta^2}\left(1 - e^{-\beta t/2}\right)^2}$$

이다. 이것은 상수가 아니고, 괄호 안의 $1 - e^{-\beta t/2}$는 $t \geq 0$에서 음이 아니므로 진짜 해이다. (v로 나눈 것은 $v > 0$인 $t > 0$에서 타당했다.)

소문항 (ii)

이번에는 지수가 $\frac{2}{3}$이므로 $y^{2/3}$과 y가 공통인수를 갖게 하고 싶다. $y = v^3$, 즉 $v = y^{1/3} \geq 0$으로 놓는다. 그러면 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 3v^2\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$이고 $y^{2/3} = v^2$이므로

$$3v^2\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \alpha v^2 - \beta v^3.$$

을 얻는다.

? **생각해 보기** 치환 $v = y^{1/3}$을 어떻게 짐작할 수 있을까?

소문항 (i)에서는 $v = y^{1-\frac{1}{2}}$로 놓아 양변이 공통인수 v를 갖게 했다. 베르누이 방정식 $\dot{y} = \alpha y^n - \beta y$에서는 치환 $v = y^{1-n}$이 언제나 통하며, 여기서는 $1 - n = \frac{1}{3}$이다.

$v \equiv 0$ (상수해 $y \equiv 0$)을 제외하면 v^2으로 나눌 수 있다.

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{\beta}{3}v = \frac{\alpha}{3}.$$

적분인자 $e^{\beta t/3}$을 써서 앞에서와 똑같이 하면, 상수 D에 대하여 (괄호 안이 음이 아닌 범위에서)

$$y^{1/3} = \frac{\alpha}{\beta} + De^{-\beta t/3}, \qquad \text{즉} \qquad y = \left(\frac{\alpha}{\beta} + De^{-\beta t/3}\right)^3,$$

이다. 조건 $y_2(0) = 0$에 의해 $D = -\alpha/\beta$이어야 하므로

$$\boxed{y_2(t) = \frac{\alpha^3}{\beta^3}\left(1 - e^{-\beta t/3}\right)^3}$$

이다.

소문항 (iii)

$\alpha = \beta$이면

$$y_1(t) = \left(1 - e^{-t/2}\right)^2, \qquad y_2(t) = \left(1 - e^{-t/3}\right)^3.$$

각 곡선의 모양. $1 - e^{-t/2}$와 $1 - e^{-t/3}$은 0에서 시작해 1을 향해 증가하므로, 두 곡선 모두 0에서 출발하여 증가한다. $t \to \infty$일 때 둘 다 1로 수렴(converge)하는데, 이는 (i)에서는 상수해 $y = \alpha^2/\beta^2 = 1$, (ii)에서는 상수해 $y = \alpha^3/\beta^3 = 1$이다. 미분하면

$$y_1' = e^{-t/2}\left(1 - e^{-t/2}\right), \qquad y_2' = e^{-t/3}\left(1 - e^{-t/3}\right)^2,$$

이므로 두 곡선 모두 원점에서 기울기가 0이다. $w = e^{-t/2}$일 때 기울기 $y_1' = w(1-w)$는 $w = \frac{1}{2}$에서 최대이므로, y_1은 $t = 2\ln 2$, $y_1 = \frac{1}{4}$에서 변곡점(point of inflection)을 갖는다. 마찬가지로 $w = e^{-t/3}$일 때 $y_2' = w(1-w)^2$은 $w = \frac{1}{3}$에서 최대이므로, $t = 3\ln 3$, $y_2 = \frac{8}{27}$에서 변곡점을 갖는다. 각 곡선은 원점에서 점근선(asymptote) $y = 1$을 향해 올라가는 S자 모양이다.

상대적 위치. $u = e^{-t/6}$으로 놓으면 $t > 0$에서 $0 < u < 1$이고 $e^{-t/2} = u^3$, $e^{-t/3} = u^2$이다. 그러면

$$y_1 = (1-u^3)^2 = (1-u)^2(1+u+u^2)^2, \qquad y_2 = (1-u^2)^3 = (1-u)^3(1+u)^3,$$

이므로

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{(1+u+u^2)^2}{(1-u)(1+u)^3}.$$

이다. 전개하면 $(1+u+u^2)^2 = 1 + 2u + 3u^2 + 2u^3 + u^4$이고 $(1-u)(1+u)^3 = (1-u^2)(1+u)^2 = 1 + 2u - 2u^3 - u^4$이다. 분자에서 분모를 빼면

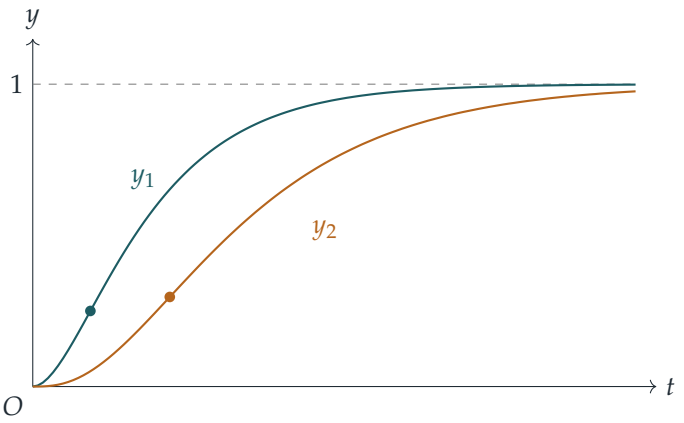
$$3u^2 + 4u^3 + 2u^4 > 0 \qquad (0 < u < 1),$$

이고 분모는 양수이므로 $y_1/y_2 > 1$이다. 따라서

$$y_1(t) > y_2(t) \quad \text{모든} t > 0 :$$

에 대하여 성립한다. 즉 두 곡선은 원점에서만 만나고, 그 밖의 모든 곳에서 y_1이 y_2보다 위에 있다.

이것은 양 끝에서의 거동과도 일치한다. $t = 0$ 근처에서 $y_1 \approx \frac{t^2}{4}$인 반면 $y_2 \approx \frac{t^3}{27}$로 훨씬 작다. t가 클 때 $1 - y_1 \approx 2e^{-t/2}$이고 $1 - y_2 \approx 3e^{-t/3}$인데, $e^{-t/3}$이 더 천천히 감소하므로 y_2가 점근선에서 더 아래에 있다.



점은 변곡점을 나타내며, y_1 위의 $(2\ln 2, \frac{1}{4})$와 y_2 위의 $(3\ln 3, \frac{8}{27})$이다.

검산

- 다시 대입해 보기: $\alpha = \beta = 1$일 때 y_1에 대하여, $w = e^{-t/2}$로 두면 $y_1^{1/2} - y_1 = (1-w) - (1-w)^2 = w(1-w)$이고, 이것은 정확히 y_1'이다.
- t가 클 때: $y_1 \to \alpha^2/\beta^2$인데, 이는 $\alpha y^{1/2} = \beta y$가 되는 0이 아닌 점이다. 마찬가지로 $y_2 \to \alpha^3/\beta^3$이며, 이는 $\alpha y^{2/3} = \beta y$가 되는 점이다.
- $\alpha = \beta = 1$일 때의 수치: $t = 2$에서 $y_1 \approx 0.400$, $y_2 \approx 0.115$이고, $t = 10$에서 $y_1 \approx 0.987$, $y_2 \approx 0.897$이다. 두 공식은 컴퓨터로 미분방정식(differential equation)을 단계별로 수치 적분하여서도 확인했다.

흔한 실수

- $y \equiv 0$도 해라는 점을 언급하지 않고 v (또는 v^2)로 나누는 것. 문제에서 원점을 지나는 **상수가 아닌** 해를 구하라고 한 이유가 바로 이것이다.
- 지수를 틀리는 것: 치환 $y = v^3$은 $e^{-\beta t/2}$가 아니라 $e^{-\beta t/3}$을 준다.
- 기울기만으로 곡선의 위아래를 판단하는 것. 두 곡선의 높이가 같은 $y \in (0,1)$인 곳에서는 $y^{2/3} > y^{1/2}$이므로 그곳에서 y_2가 더 빨리 증가하겠지만, 이것만으로는 어느 곡선이 더 위에 있는지 알 수 없으므로 직접 비교해야 한다.

STEP 너머

이 방정식들은 베르누이 방정식으로, 대학 1학년 과정에서 $v = y^{1-n}$으로 푸는 표준적인 유형이다. 또한 이들은 해의 비유일성(non-uniqueness)을 보여 준다. $y^{1/2}$과 $y^{2/3}$은 $y = 0$에서 기울기가 무한대이므로 우변이 그곳에서 립시츠(Lipschitz) 조건을 만족하지 않으며, $y \equiv 0$과 y_1이 모두 원점을 지난다. 실제로 임의의 시각 t_0까지 0에 머물다가 그 뒤로 $y_1(t - t_0)$을 따라가면 해들의 한 족 전체를 얻는다. 피카르-린델뢰프 정리(Picard–Lindelöf theorem)는 이런 일이 일어날 수 없는 경우가 정확히 언제인지 설명해 준다. Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정식)는 베르누이 방정식과 해의 존재성 및 유일성(existence and uniqueness)을 모두 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.