풀이

STEP II 2018, 문제 7

순수수학 • 기하에서의 벡터

STEP II 2018, 7번 문제

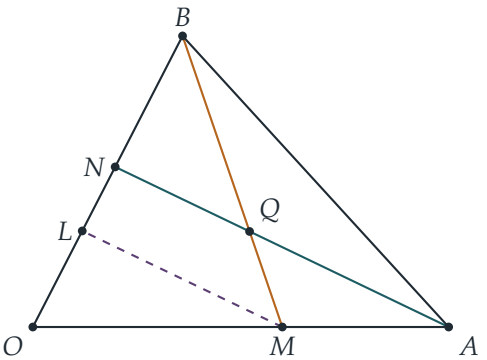
더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/18-s2-q7

핵심 아이디어

M은 OA 위에, N은 OB 위에 있으므로 $\mathbf{m}$은 $\mathbf{a}$의 실수배로, $\mathbf{n}$은 $\mathbf{b}$의 실수배로 쓸 수 있다. 그러면 점 Q에는 BM을 따라가는 길과 AN을 따라가는 길, 두 가지로 도달할 수 있고, 각 경로마다 $\mathbf{q}$가 $\mathbf{a}$와 $\mathbf{b}$의 일차결합(linear combination)으로 표현된다. $\mathbf{a}$와 $\mathbf{b}$는 평행하지 않으므로 계수를 비교(comparing coefficients)할 수 있고, 이것으로 모든 것이 나온다.

풀이



$\mathbf{m}$ 구하기

$\mathbf{m} = m\,\mathbf{a}$, $\mathbf{n} = n\,\mathbf{b}$라 하자. M과 N은 변 위에 있으므로 $0 < m < 1$이고 $0 < n < 1$이다.

BM을 따라서. Q는 M과 B 사이에 있고 $MQ : QB = \mu : 1$이므로, Q는 M에서 B까지 가는

길의 $\frac{\mu}{1+\mu}$만큼 간 지점이다.

$$\mathbf{q} = \mathbf{m} + \frac{\mu}{1+\mu}(\mathbf{b} - \mathbf{m}) = \frac{1}{1+\mu}\,\mathbf{m} + \frac{\mu}{1+\mu}\,\mathbf{b} = \frac{m}{1+\mu}\,\mathbf{a} + \frac{\mu}{1+\mu}\,\mathbf{b}.$$

AN을 따라서. 마찬가지로 $NQ : QA = \nu : 1$이므로

$$\mathbf{q} = \mathbf{n} + \frac{\nu}{1+\nu}(\mathbf{a} - \mathbf{n}) = \frac{\nu}{1+\nu}\,\mathbf{a} + \frac{1}{1+\nu}\,\mathbf{n} = \frac{\nu}{1+\nu}\,\mathbf{a} + \frac{n}{1+\nu}\,\mathbf{b}.$$

생각해 보기 **a**의 계수끼리, 그리고 따로 **b**의 계수끼리 같다고 놓아도 되는 이유는 무엇인가?

O, A, B는 실제로 삼각형을 이루는 세 꼭짓점이므로 **a**와 **b**는 영벡터가 아니고 서로 평행하지도 않다. 만약 $\beta \neq 0$인 상태에서 $\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} = \mathbf{0}$이면 **b**가 **a**의 실수배가 되어 버린다. 따라서 $\beta = 0$이고, 그러면 $\alpha = 0$이다. 그러므로 평면 위의 각 벡터를 **a**와 **b**의 일차결합으로 나타내는 방법은 오직 하나뿐이다.

q에 대한 두 식을 빼서 계수를 비교하면

$$\frac{m}{1+\mu} = \frac{\nu}{1+\nu}, \qquad \frac{\mu}{1+\mu} = \frac{n}{1+\nu}.$$

첫째 식에서 $m = \dfrac{(1+\mu)\nu}{1+\nu}$, 즉

$$\mathbf{m} = \frac{(1+\mu)\nu}{1+\nu}\,\mathbf{a},$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다. 둘째 식에서는 역할을 바꾼 같은 논법으로

$$\mathbf{n} = \frac{\mu(1+\nu)}{1+\mu}\,\mathbf{b}.$$

를 얻는다.

λ 구하기

이제 $\mathbf{l} = \lambda\mathbf{b}$이므로

$$\overrightarrow{ML} = \lambda\mathbf{b} - m\,\mathbf{a}, \qquad \overrightarrow{AN} = n\,\mathbf{b} - \mathbf{a}.$$

두 벡터가 평행할 필요충분조건은 어떤 스칼라 k에 대하여 $\overrightarrow{ML} = k\,\overrightarrow{AN}$인 것이다. (앞에서와 같은 이유로 허용되는) **a**의 계수 비교로 $k = m$을 얻고, 이어서 **b**의 계수에서 $\lambda = kn = mn$을 얻는다. (기하학적으로 보면, $ML \parallel AN$이므로 삼각형 OML과 OAN은 닮음(similar)이고, 따라서 $OL/ON = OM/OA$이다.) 그러므로

$$\lambda = mn = \frac{(1+\mu)\nu}{1+\nu} \cdot \frac{\mu(1+\nu)}{1+\mu} = \mu\nu.$$

조건 $\mu\nu < 1$

$$m < 1 \iff (1+\mu)\nu < 1+\nu \iff \mu\nu < 1,$$
$$n < 1 \iff \mu(1+\nu) < 1+\mu \iff \mu\nu < 1,$$

여기서 분모를 없애는 데 $1+\nu > 0$과 $1+\mu > 0$을 이용하였다. 따라서 μ와 ν가 양수일 때, 조건 $\mu\nu < 1$은 M이 O와 A 사이에 엄밀하게 놓이고 N이 O와 B 사이에 엄밀하게 놓이기 위해 꼭 필요한 조건이다. 같은 말로, (Q가 이 비율로 나누는) 직선 AN과 BM이 삼각형 내부에서 만난다는 뜻이다. 또한 이 조건은 $\lambda < 1$이라는 것도 말해 준다. 즉 M을 지나고 AN에 평행한 직선은 O와 B 사이에서 OB와 만나는데, M이 변 OA 위에 있으므로 당연히 그래야 한다. $\mu\nu = 1$이면 $M = A$, $N = B$가 되어 도형이 퇴화하고, $\mu\nu > 1$이면 M과 N은 변의 연장선 위에서 A와 B 너머에 놓인다.

검산

- **중선**(*median*). M과 N이 중점이면 Q는 무게중심(centroid)이고, 무게중심은 각 중선을 꼭짓점에서부터 2 : 1로 나눈다. 따라서 $\mu = \nu = \frac{1}{2}$이고, 공식은 마땅히 그래야 하듯 $m = \frac{(3/2)(1/2)}{3/2} = \frac{1}{2}$을 준다. 이때 $\lambda = \frac{1}{4}$이다. 삼각형 OAN에서 중점연결정리(midpoint theorem)에 의해 L은 ON의 중점이므로, OB를 따라 4분의 1만큼 간 지점이다.
- **대칭성**. $A \leftrightarrow B$를 바꾸면 $M \leftrightarrow N$과 $\mu \leftrightarrow \nu$가 바뀌고, m과 n에 대한 공식도 올바르게 서로 바뀐다. 답 $\lambda = \mu\nu$ 역시 대칭이다.
- 약 10^5개의 무작위 삼각형에 대해 변 위에 M과 N을 무작위로 잡고 μ와 ν를 측정하는 컴퓨터 검사를 하여, m, n, $\lambda = \mu\nu$가 10^{-12} 이내로 맞음을 확인하였다. 예를 들어 (그림에서처럼) $m = 0.6$, $n = 0.55$이면 $\lambda = 0.33$이다.

흔한 실수

- 내분 비율의 방향을 거꾸로 잡는 것: Q는 M에서 B까지 가는 길의 $\frac{\mu}{1+\mu}$만큼 간 지점이지, B에서 M까지가 아니다.
- 이유를 밝히지 않고 계수를 같다고 놓는 것. 이는 **a**와 **b**가 평행하지 않다는 사실에 의존한다.
- 삼각형이 예각삼각형이라는 조건이 어떤 역할을 할 것이라 기대하는 것. 그렇지 않다. 이 논증은 모든 삼각형에서 성립한다.

STEP 너머

계수 비교가 가능한 것은 **a**와 **b**가 **일차독립**(*linearly independent*)이어서 평면의 기저(basis)를 이루기 때문이다. 이것이 대학 첫 선형대수학(linear algebra) 강의의 중심 아이디어이다. 깔끔한 답 $\lambda = \mu\nu$는 체바(Ceva)의 정리, 메넬라오스(Menelaus)의 정리와 같은 계열의 비율에 관한 결과이며, 이런 정리들은 무게중심 좌표(barycentric coordinates)에서 가장 깔끔하게 다룰 수 있다. Strang의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수학 입문)는 기저와 좌표를 꼼꼼하게 전개한다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.