풀이

STEP II 2018, 문제 6

순수수학 • 계승과 소수

> **STEP II 2018, 6번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/18-s2-q6

핵심 아이디어

두 소문항 모두 한 가지 사실에 달려 있다. 소수(prime) p가 $k!$를 나누는 것은 정확히 $p \leq k$일 때이다. (i)에서는 $n \geq 5$이기만 하면 계승(factorial)이 5의 배수이고, 따라서 $n! + 5$도 그렇다. (ii)에서 좌변은 $2n-1$ 이하의 수들로만 만들어지므로, $2n-1$보다 큰 소수는 좌변을 나눌 수 없다. $m!$가 그런 소수를 포함할 만큼 크다면 등식은 성립하지 않는다. 두 정리는 m을 크게 만들고 그 소수를 제공하기 위해 주어져 있다.

풀이

소문항 (i)

$n \geq 5$이면 5는 $n!$의 인수(factor) 중 하나이므로 $5 \mid n!$이고, 따라서 $5 \mid n! + 5$이다. 그런데 $n! + 5 > 5$이므로 $n! + 5$는 1보다 크고 자기 자신보다 작은 인수 5를 가지며, 따라서 소수가 아니다. 그러므로 $n \leq 4$인 경우만 확인하면 된다:

$$1! + 5 = 6, \qquad 2! + 5 = 7, \qquad 3! + 5 = 11, \qquad 4! + 5 = 29.$$

6은 소수가 아니고, 나머지 셋은 소수이다. 따라서 해는 다음과 같다.

$$(n, p) = (2, 7),\ (3, 11),\ (4, 29).$$

소문항 (ii)

$P_n = 1! \times 3! \times \cdots \times (2n-1)!$라 하자. 이 계승들 각각에 들어 있는 모든 인수는 1 이상 $2n-1$ 이하의 정수이다. 따라서 소수 q가 P_n을 나누면, q가 소수이므로 그 정수들 중 하나

를 나누고, 따라서 $q \le 2n-1$이다. 이로부터 핵심 사실을 얻는다:

$$\text{다음 수는 어떤 소수} q > 2n-1\text{로도 나누어떨어지지 않는다: } P_n. \qquad (*)$$

한편 $q \le m$인 모든 소수는 $m!$를 나눈다. 따라서 $P_n = m!$이면, m은 $2n-1$보다 큰 모든 소수보다 작다.

n이 큰 경우. $n \ge 7$이고 $P_n = m!$이라고 가정하자. 정리 1에 의해 $m! = P_n > (4n)!$이므로 $m > 4n$이다(계승은 증가한다). 정리 2에 의해 소수 q로서 $2n < q < 4n$인 것이 존재한다. 그러면 $q < 4n < m$이므로 $q \mid m! = P_n$이다. 그런데 $q > 2n > 2n-1$이므로 이는 $(*)$에 모순이다. 따라서 $n \ge 7$인 해는 없다.

> **생각해 보기** 왜 모든 n에 대하여 그냥 정리를 인용할 수는 없을까?

정리 1은 $n \ge 7$인 경우에 대해서만 주장되어 있으며, 실제로 $n = 6$일 때는 거짓이다. 따라서 $n = 1, \dots, 6$은 직접 확인해야 한다. 계산을 짧게 하기 위해 다시 $(*)$를 이용한다.

n이 작은 경우.

- $n = 1$: $P_1 = 1 = 1!$이므로 $m = 1$이다.
- $n = 2$: $P_2 = 1 \times 6 = 6 = 3!$이므로 $m = 3$이다.
- $n = 3$: $P_3 = 6 \times 120 = 720 = 6!$이므로 $m = 6$이다.
- $n = 4$: $P_4 = 720 \times 5040$이다. $720 = 6!$이고 $5040 = 7 \times 8 \times 9 \times 10$이므로 $P_4 = 6! \times 7 \times 8 \times 9 \times 10 = 10!$을 얻고, 따라서 $m = 10$이다.
- $n = 5$: $P_5 = P_4 \times 9! = 10! \times 9! > 10!$이므로 $m \ge 11$이다. 그러면 소수 11이 $m!$를 나누지만, $11 > 9 = 2n-1$이므로 $(*)$에 모순이다. 해가 없다.
- $n = 6$: $P_6 = 10! \times 9! \times 11! > 12!$이므로($10! \times 9! > 12$이기 때문이다) $m \ge 13$이다. 그러면 소수 13이 $m!$를 나누지만, $13 > 11 = 2n-1$이므로 $(*)$에 모순이다. 해가 없다.

해가 존재하는 각 경우에 m은 유일하다. 양의 정수의 계승은 2!부터 순증가(strictly increasing)하기 때문이다(그리고 $1! = 1 < 2!$이다). 따라서 해는 다음과 같다.

$$(n, m) = (1, 1),\ (2, 3),\ (3, 6),\ (4, 10).$$

검산

항등식 $1!\,3!\,5!\,7! = 10!$은 쉽게 확인할 수 있다. 양변 모두 3 628 800이다. $n \le 59$, $m < 400$ 범위에서 컴퓨터로 탐색한 결과 정확히 위의 네 쌍만 나왔으며, $n! + 5$가 소수인 것은

$n = 2, 3, 4$일 때뿐임도 확인했다($n \leq 30$ 범위에서 탐색). 또한 정리 1이 $n = 6$에서 성립하지 않음도 확인되는데, 바로 이 때문에 $n = 5$와 $n = 6$을 직접 확인하는 과정이 정말로 필요하다.

흔한 실수

- 소문항 (ii)에서 $n = 1$을 빠뜨리는 것: 이때 곱은 인수 1! 하나뿐이므로 $(1, 1)$은 해이다.
- $n = 5$나 $n = 6$에 정리 1을 사용하는 것. 정리 1은 $n \geq 7$에 대해서만 서술되어 있으므로, 이 경우들은 따로 논증해야 한다.
- "$q \mid m!$"라고 말하면서 $q \leq m$인지 확인하지 않는 것. 바로 이 때문에 정리 1로부터 $m > 4n$을 얻어야 한다.

STEP 너머

정리 2는 베르트랑 공준(Bertrand's postulate)이다. 즉 모든 $n \geq 1$에 대하여 소수 p로서 $n < p \leq 2n$인 것이 존재한다. 체비쇼프(Chebyshev)가 1852년에 이를 증명했고, 이후 에르되시(Erdős)가 중심 이항계수(central binomial coefficient) $\binom{2n}{n}$을 이용한 아름다운 초등적 증명을 내놓았다. $n! + 1 = m^2$ 같은 방정식(브로카르 문제(Brocard's problem))은 아직 풀리지 않은 문제이다. Davenport의 *The Higher Arithmetic*(고등 산술)은 소수와 계승의 산술로 나아가는 좋은 다음 단계이다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.