풀이

STEP II 2018, 문제 5

순수수학 • 급수의 적분

> **STEP II 2018, 5번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/18-s2-q5

핵심 아이디어

각 소문항에서는 함수를 거듭제곱급수(power series)로 바꾼 뒤 한 항씩 적분한다. (i)에서는 등비급수(geometric series)를 적분하기만 하면 된다. (ii)에서는 지수함수를 전개하고 나면 모든 항이 $\int_0^\infty x^m \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ 꼴의 적분이 되는데, 이것은 계승(factorial)이고, 계승들이 약분되어 정확히 (i)의 급수가 남는다. (iii)에서는 분모의 $\ln x$가 실마리이다. $x = \mathrm{e}^{-t}$로 치환(substitution)하면 이것이 $-t$가 되고, 적분은 (ii)의 적분 두 개로 바뀐다.

풀이

소문항 (i)

$|x| < 1$일 때 이항전개(binomial expansion)(공비가 $-x$인 등비급수)는 다음과 같다.

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n.$$

양변을 0부터 x까지 적분한다. 좌변은 $\ln 1 = 0$이므로 $\int_0^x \frac{\mathrm{d}u}{1+u} = \ln(1+x)$이다. 우변은 항별로 적분하면

$$\begin{aligned}\ln(1+x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} \qquad (\text{첨자를 바꿈: } n+1 \text{ 대신} n) \\ &= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n},\end{aligned}$$

이고, 이것이 $|x| < 1$에 대해 구하려던 결과이다.

소문항 (ii)

모든 x에 대하여

$$\mathrm{e}^{-ax} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-ax)^n}{n!} = 1 - ax + \frac{a^2x^2}{2!} - \frac{a^3x^3}{3!} + \cdots .$$

$n = 0$인 항은 1이므로

$$\frac{1 - \mathrm{e}^{-ax}}{x} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-a)^n x^{n-1}}{n!}.$$

여기서 x로 나누는 것은 문제가 없다. 남은 모든 항이 인수 x를 가지므로 피적분함수는 $x = 0$에서 아무 문제 없이 잘 정의된다(a로 수렴한다). e^{-x}를 곱하고 항별로 적분하면(수렴(convergence)은 신경 쓰지 않아도 된다고 문제에 주어져 있다)

$$\int_0^{\infty} \frac{(1 - \mathrm{e}^{-ax})\,\mathrm{e}^{-x}}{x}\,\mathrm{d}x = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-a)^n}{n!} I_{n-1}, \qquad \text{여기서} I_m = \int_0^{\infty} x^m \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x.$$

? **생각해 보기** I_m은 무엇인가?

$u = x^m$, $\mathrm{d}v = \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$로 두고 부분적분(integration by parts)을 한다. $m \geq 1$이면

$$I_m = \Big[-x^m \mathrm{e}^{-x} \Big]_0^{\infty} + m \int_0^{\infty} x^{m-1} \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = m I_{m-1},$$

이다. $x \to \infty$일 때 $x^m \mathrm{e}^{-x} \to 0$이고(지수함수가 이긴다) $x = 0$에서는 값이 0이기 때문이다. $I_0 = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = 1$이므로 $I_m = m!$이다.

따라서 $I_{n-1} = (n-1)!$이고 $\dfrac{(n-1)!}{n!} = \dfrac{1}{n}$이다. 그러므로

$$\int_0^{\infty} \frac{(1 - \mathrm{e}^{-ax})\,\mathrm{e}^{-x}}{x}\,\mathrm{d}x = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-a)^n}{n} = \ln(1 + a),$$

이다. 여기서 소문항 (i)에 $x = a$를 대입했는데, $|a| < 1$이므로 이것은 허용된다. 이것이 구하려던 결과이다.

소문항 (iii)

$x = \mathrm{e}^{-t}$로 치환하면 $\ln x = -t$이고 $\mathrm{d}x = -\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$이다. x가 0부터 1까지 움직일 때 t는 ∞부터 0까지 내려간다. 또한 $x^p = \mathrm{e}^{-pt}$, $x^q = \mathrm{e}^{-qt}$이다. 따라서

$$\int_0^1 \frac{x^p - x^q}{\ln x}\,\mathrm{d}x = \int_{\infty}^0 \frac{\mathrm{e}^{-pt} - \mathrm{e}^{-qt}}{-t} \left(-\mathrm{e}^{-t}\right) \mathrm{d}t = \int_0^{\infty} \frac{\left(\mathrm{e}^{-qt} - \mathrm{e}^{-pt}\right)\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t,$$

이다. 여기서 두 음의 부호는 서로 상쇄되었고, 적분 구간의 위끝과 아래끝을 바꾸면서 p와 q의 자리가 바뀌었다. 이제 $\mathrm{e}^{-qt} - \mathrm{e}^{-pt} = \left(1 - \mathrm{e}^{-pt}\right) - \left(1 - \mathrm{e}^{-qt}\right)$로 쓰고 적분을 나눈다.

각 부분은 각각 $a = p$, $a = q$인 (ii)의 꼴이고, 둘 다 $|a| < 1$을 만족한다. 따라서

$$\int_0^1 \frac{x^p - x^q}{\ln x}\,\mathrm{d}x = \ln(1+p) - \ln(1+q) = \ln\left(\frac{1+p}{1+q}\right).$$

두 적분이 각각 따로 수렴하므로 이렇게 나누는 것은 정당하다. (ii)에 의해 각 적분은 유한한 값을 가진다.

검산

- $p = q$이면 피적분함수는 0이고, 실제로 $\ln\frac{1+p}{1+p} = 0$이다.
- p와 q를 바꾸면 피적분함수와 답의 부호가 모두 바뀐다.
- 부호 확인: $0 < x < 1$이면 $\ln x < 0$이다. $p < q$이면 $x^p > x^q$이므로 피적분함수는 음수이고, $\ln\frac{1+p}{1+q}$도 음수이다.
- $p = \frac{1}{2}, q = 0$이면 답은 $\ln\frac{3}{2} \approx 0.405465$이다. $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}-1}{\ln x}\,\mathrm{d}x$를 수치적분하면 같은 값이 나오고, $(-1, 1)$에서 p와 q를 무작위로 골라도 소수점 아래 여섯째 자리까지 공식과 일치한다.

흔한 실수

- e^{-ax}의 $n = 0$인 항이 1과 상쇄된다는 것을 잊고, 0에서 발산하는 e^{-x}/x를 적분하려고 하는 것.
- (iii)의 치환에서 부호를 하나 잃어버리는 것. 추적해야 할 음의 부호가 세 개($\ln x$에서, $\mathrm{d}x$에서, 그리고 적분 구간을 뒤집는 데서) 있으며, 하나라도 틀리면 $\ln\frac{1+q}{1+p}$가 나온다.
- $(n-1)!$ 대신 $I_{n-1} = n!$로 쓰는 것. 그러면 계승들이 약분되어 $\frac{1}{n}$이 되지 않는다.

STEP 너머

적분 $I_m = \int_0^\infty x^m \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = m!$은 감마함수(gamma function) $\Gamma(m+1)$이며, 이 함수는 계승을 정수가 아닌 수로 확장한다. (iii)의 적분은 "적분 기호 아래에서의 미분(differentiating under the integral sign)"의 고전적인 예이다. p에 대해 미분하면 다루기 어려운 $\ln x$가 사라지고 $\int_0^1 x^p\,\mathrm{d}x = \frac{1}{p+1}$이 남는다. 실제로 이 결과는 $p, q > -1$이기만 하면 성립한다. 신경 쓰지 않아도 된다고 했던 급수와 적분의 순서 바꾸기는 해석학(analysis) 강의에서 균등수렴(uniform convergence)이나 지배수렴(dominated convergence)으로 정당화된다. 이러한 단계의 바탕에 있는 해석학에 대해서는 Abbott, *Understanding Analysis*(해석학 입문서)를 참고하라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.