풀이

STEP II 2018, 문제 4

순수수학 • 삼각방정식

> **STEP II 2018, 4번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/18-s2-q4

핵심 아이디어

주어진 항등식(identity)은 코사인의 합을 곱으로 바꾸어 주며, 0과 같다고 놓은 방정식을 풀 때 필요한 것이 바로 곱이다. (i)에서는 바깥쪽 두 항과 안쪽 두 항을 짝지으면 곧바로 공통인수(common factor)가 생긴다. (ii)와 (iii)에서는 모든 것을 두 각의 합의 절반과 차의 절반으로 나타내는 것이 유용하며, 그러면 (ii)는 인수분해(factorise)되고 (iii)은 두 제곱의 합이 0이 되는 꼴이 된다.

풀이

소문항 (i)

첫째 항과 마지막 항을 짝짓고, 가운데 두 항을 짝짓는다. 항등식에 의해

$$\cos x + \cos 4x = 2\cos\tfrac{5x}{2}\cos\tfrac{3x}{2},$$
$$3(\cos 2x + \cos 3x) = 6\cos\tfrac{5x}{2}\cos\tfrac{x}{2}.$$

(코사인은 우함수(even function)이므로 $\cos(-\frac{3x}{2}) = \cos\frac{3x}{2}$로 쓸 수 있다.) 따라서 좌변은

$$2\cos\tfrac{5x}{2}\left(\cos\tfrac{3x}{2} + 3\cos\tfrac{x}{2}\right).$$

이다. $c = \cos\frac{x}{2}$로 두면 삼배각 공식(triple-angle formula) $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$에 의해 $\cos\frac{3x}{2} = 4c^3 - 3c$이므로, 괄호 안은 그냥 $4c^3$이다. 그러므로 방정식은

$$8\cos\tfrac{5x}{2}\cos^3\tfrac{x}{2} = 0.$$

이 된다.

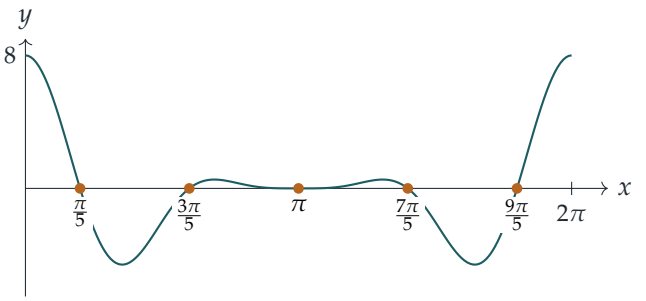
첫째 인수. $\cos\frac{5x}{2} = 0$이라는 것은 어떤 정수 k에 대하여 $\frac{5x}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi$, 즉 $x = \frac{(2k+1)\pi}{5}$라는 뜻이다. $0 \le x \le 2\pi$이려면 $0 \le 2k+1 \le 10$이어야 하므로 $k = 0, 1, 2, 3, 4$이다.

둘째 인수. $0 \le \frac{x}{2} \le \pi$에서 $\cos\frac{x}{2} = 0$이면 $\frac{x}{2} = \frac{\pi}{2}$, 즉 $x = \pi$뿐이며, 이것은 이미 앞의 목록에 들어 있다.

그러므로 해는

$$x = \frac{\pi}{5},\ \frac{3\pi}{5},\ \pi,\ \frac{7\pi}{5},\ \frac{9\pi}{5}.$$

이다. 좌변의 그래프에서 이 해들을 볼 수 있다. $x = \pi$에서는 $\cos\frac{5x}{2}$와 $\cos^3\frac{x}{2}$가 모두 0이 되므로, 곡선은 그곳에서 축을 가로지르지 않고 접하기만 한다.



소문항 (ii)

처음 두 항에 항등식을 쓰고 $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$을 이용하면

$$\cos(x+y) + \cos(x-y) - \cos 2x = 2\cos x \cos y - 2\cos^2 x + 1.$$

이다. 이것을 1과 같다고 놓으면

$$2\cos x\,(\cos y - \cos x) = 0,$$

이므로 $\cos x = 0$ 또는 $\cos y = \cos x$이다.

- $0 \le x \le \pi$에서 $\cos x = 0$이면 $x = \frac{\pi}{2}$이다(이때 y는 어떤 값이어도 된다).
- $\cos y = \cos x$이면 $x = y$이다. 코사인은 $[0, \pi]$에서 순감소(strictly decreasing)하므로 그 구간에서 각 값을 단 한 번만 갖기 때문이다.

따라서 요구한 대로 $x = y$ 또는 $x = \frac{\pi}{2}$이다.

소문항 (iii)

$s = \frac{1}{2}(x+y)$, $d = \frac{1}{2}(x-y)$로 둔다. 항등식에 의해 $\cos x + \cos y = 2\cos s \cos d$이고, $\cos(x+y) = \cos 2s = 2\cos^2 s - 1$이다. 방정식은

$$2\cos s\cos d - 2\cos^2 s + 1 = \tfrac{3}{2} \iff 4\cos^2 s - 4\cos s\cos d + 1 = 0.$$

이 된다.

> **생각해 보기** 방정식은 하나인데 미지수는 둘이다. 어떻게 이것으로 x와 y를 모두 결정할 수 있을까?

$\cos s$에 대하여 완전제곱식(complete the square)을 만든다. $1 = \cos^2 d + \sin^2 d$이므로

$$4\cos^2 s - 4\cos s \cos d + \cos^2 d + \sin^2 d = (2\cos s - \cos d)^2 + \sin^2 d = 0.$$

이다. 두 실수의 제곱의 합이 0이 되는 것은 둘 다 0일 때뿐이므로, 다음 두 방정식을 얻는다.

$$\sin d = 0 \qquad \text{그리고} \qquad 2\cos s = \cos d.$$

$x, y \in [0, \pi]$이므로 $-\frac{\pi}{2} \le d \le \frac{\pi}{2}$이고, 이 범위에서 sin의 영점은 $d = 0$뿐이다. 따라서 $x = y$이고, 그러면 $s = x$, $\cos d = 1$이므로 $\cos x = \frac{1}{2}$이다. $0 \le x \le \pi$이므로 이것은 $x = \frac{\pi}{3}$을 뜻한다.

따라서 유일한 해는

$$x = y = \frac{\pi}{3}.$$

이다. 실제로 $\cos\frac{\pi}{3} + \cos\frac{\pi}{3} - \cos\frac{2\pi}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$이다.

같은 계산으로 더 많은 것을 알 수 있다. 모든 x, y에 대하여

$$\tfrac{3}{2} - \big(\cos x + \cos y - \cos(x+y)\big) = \tfrac{1}{2}\big[(2\cos s - \cos d)^2 + \sin^2 d\big] \ge 0,$$

이므로 $\frac{3}{2}$는 좌변이 가질 수 있는 최댓값이고, 이 방정식은 정확히 그 최댓값이 어디에서 나타나는지를 묻는 것이다.

검산

- (i)에서 $x = \frac{\pi}{5}$일 때: $\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta$이므로 $\cos\frac{\pi}{5} + \cos\frac{4\pi}{5} = 0$이고 $\cos\frac{2\pi}{5} + \cos\frac{3\pi}{5} = 0$이다. $x = 0$일 때 좌변은 $1+3+3+1 = 8$로, $8\cos 0\cos^3 0$과 일치한다.
- $[0, 2\pi]$ 위의 촘촘한 격자에서 컴퓨터로 탐색하면 위의 다섯 영점이 정확히 나오고, $[0, \pi]^2$ 위의 격자에서 탐색하면 $\cos x + \cos y - \cos(x+y)$의 최댓값은 1.5이며 $x = y \approx 1.0472 = \frac{\pi}{3}$에서만 이 값을 갖는다.
- (ii)에서 $x = \frac{\pi}{2}$이면 모든 y에 대하여 $\cos(\frac{\pi}{2} + y) + \cos(\frac{\pi}{2} - y) - \cos\pi = -\sin y + \sin y + 1 = 1$이다.

흔한 실수

- $x = \pi$를 두 번 적거나 빠뜨리는 것: (i)에서 이 값은 두 인수 모두에서 나오지만 해로서는 하나이다.

- (ii)에서 $\cos x$로 나누어 $x = \frac{\pi}{2}$를 잃어버리는 것.
- (iii)에서 $\cos s$에 대한 이차식에서 멈추고, 판별식(discriminant)(또는 제곱의 합)을 이용해 $\cos^2 d = 1$을 이끌어 내지 않는 것.

STEP 너머

(i)의 계수 $1, 3, 3, 1$은 우연이 아니다. 좌변은 $e^{ix}(1+e^{ix})^3$의 실수부(real part)이고, $1 + e^{ix} = 2\cos\frac{x}{2}\, e^{ix/2}$이므로 이것은 한 줄 만에 $8\cos^3\frac{x}{2}\cos\frac{5x}{2}$가 된다. (iii)은 삼각형의 세 각에 대한 고전적인 부등식 $\cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}$가 모습을 바꾼 것이며($A = x$, $B = y$, $C = \pi - x - y$로 둔다), 등호는 정삼각형(equilateral triangle)일 때만 성립한다. 이처럼 두 변수 함수의 최댓값을 구하는 것은 다변수 미적분학(multivariable calculus)에서 대학 1학년 때 배우는 표준적인 주제이다. Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)는 복소 지수함수를 쓰면 이와 같은 삼각함수 항등식이 거의 저절로 얻어진다는 것을 보여 준다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.